دانشکده مهندسی و فنآوری دانشگاه مازندران

عنوان درس: تحلیل و مدیریت سیستم‌های منابع آب ۱

Water Resources System Analysis-1

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران

مفهوم بهینه‌سازی کلاسیک

- شرایط بهینگی کان-تاکر
- روش برنامه‌ریزی خطی
- مدل‌های بهینه‌سازی خطی
- روش سیمپلکس، تحلیل حساسیت

انواع مدل های بهینه‌سازی

انواع مدل های بهینه سازی

تاکنون مدل‌های مختلفی برای بهینه‌یابی بهره‌برداری از منابع آب تدوین و مورد استفاده قرار گرفته‌اند که به دو دسته کلی مدل‌های کلاسیک و مدل‌های غیرکلاسیک تقسیم‌بندی می‌شوند.

روش های بهینه یابی کلاسیک (Classic Optimization)

روش‌های بهینه‌یابی کلاسیک به روش‌هایی اطلاق می‌شوند که با استفاده از روابط حاکم بر مسئله و اصول بهینه‌یابی تعیین مقادیر بهینه را انجام می‌دهند. از متداول‌ترین این روش‌های که کابردهای وسیعی در مدیریت منابع آبی دارند عبارتند از:

- برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)
- برنامه‌ریزی غیرخطی (Non-Linear Programming)
- برنامه‌ریزی خطی مقید به شانس (Chance Constrained Linear Programming)
- برنامه‌ریزی پویا (Dynamic Programming)
- برنامه‌ریزی پویای احتمالی (Stochastic Dynamic Programming)
- برنامه‌ریزی پویای مقید به شانس (Chance Constrained DP)

انواع مدل های بهینه‌سازی

در این بخش با توجه به کاربرد وسیع مدل های برنامه ریزی خطی و غیرخطی در مسائل مهندسی منابع آب، این دو رویکرد مورد بررسی و تدقیق بیشتر قرار می گیرد. در این خصوص تغییراتی که در تابع هدف و محدودیت های این دو نوع مدل رخ می دهد را می توان به صورت بندهای ذیل خلاصه نمود:

- اگر تابع هدف و همه محدودیت‌ها خطی باشند مدل بهینه سازی، خطی (Linear Programming (LP)) است.
- مدلی که در آن تابع هدف و محدودیت ها به صورت توابعی غیرخطی از متغییرهای تصمیم باشند به عنوان مدل های بهینه سازی غیرخطی (Nonlinear Programming (NP)) در نظر گرفته می شوند. مسائل برنامه ریزی غیر خطی به شکل ها و فرم های گوناگون وجود دارد.
- در صورتی که تابع هدف به صورت ترکیبی از عبارت های توان دوم از متغییرهای تصمیم باشد و محدودیت ها به صورت خطی تعریف شوند، مدل بهینه سازی به عنوان مدل برنامه ریزی غیرخطی مرتبه دوم (Quadratic Programming (QP)) نامیده می شود. در واقع تفاوت QP با LP این است که در QP برخی از عبارات تابع هدف می تواند به صورت توان دوم یک متغییر و یا حاصلضرب دو متغییر در نظر گرفته شوند.

انواع مدل های بهینه‌سازی

- در مسائل برنامه ریزی خطی و غیرخطی، ممکن است گاهی بیشتر از یک تابع هدف برای بهینه‌سازی وجود داشته باشد. ممکن است مدیریت بخواهد به طور همزمان به اهدافی برسد.
- در برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی فرض اساسی این است که متغیرهای تصمیم پیوسته‌اند. یعنی اینکه متغییرهای تصمیم هر مقداری (که با توجه به محدودیت‌ها) را می‌توانند اتخاذ کنند. اما گاهی اوقات متغییرها باید تنها عدد صحیح باشند. مثلاً لازم است که افراد و تجهیزات به صورت مقادیر عدد صحیح در مدل در نظر گرفته شود. بنابراین ممکن است بعضی از متغیرهای تصمیم گسسته باشند. که معمولاً با محدود کردن همه یا بخشی از متغییرها می‌تواند به صورت عدد صحیح ارائه شود. اگر همه متغییرها عدد صحیح باشند به آن مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خالص گویند. همچنین مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح می‌تواند به برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی و غیرخطی تقسیم شوند. اگر بعضی از متغییرها عدد صحیح و برخی دیگر پیوسته باشد به آن برنامه‌ریزی مختلط گویند. هیچ الگوریتم به خصوصی وجود ندارد که بتواند انواع مختلف برنامه‌ریزی را حل کند. به جای آن برخی از الگوریتم‌ها برای حل پاره‌ای از این مسائل توسعه یافته‌اند. مثلاً تابع هدف ممکن است مقعر، محدب یا هیچ کدام باشد. همچنین تعداد جواب‌های بهینه، ممکن است یک یا چندگانه باشد.

مدل بهینه سازی خطی

۱- مدل بهینه سازی خطی ((Linear Programming (LP)

ساده‌ترین و یکی از پرکاربردترین روش در بهینه‌یابی تک هدفه با متغیرهای پیوسته، مدل‌های بهینه‌یابی خطی می‌باشند. این مدل با حل نوعی از مسائل سروکار دارد که روابط بین متغیرها چه در تابع هدف و چه در قیود، خطی می‌باشند. این نوع برنامه‌ریزی در منابع آب برای مسائل با روابط ساده مانند تخصیص مستقیم منابع تا مسائل پیچیده بهره‌برداری و مدیریت قابل بکارگیری است. همچنین تحت فرضیات مشخص و منطقی، مسائل غیرخطی نیز قابل تبدیل به مسائل خطی می باشند و بوسیله روش‌های تکرار یا تقریب حل می‌شوند.

مزایای استفاده از برنامه‌ریزی خطی عبارتند از:

- امکان حل مسائل با تعداد متغیرهای زیاد و دارای مشکلات ابعادی
- عدم نیاز به مقادیر اولیه
- امکان محاسبه سریع جواب بهینه کلی
- در دسترس بودن توابع، کد و نرم‌افزارهای مربوط

مدل بهینه سازی خطی

جهت ارائه یک شکل کلی از مدل برنامه ریزی خطی فرض کنید که $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصمیم‌گیری بوده و معیار مورد نظر که معمولاً تابع هدف نامیده می‌شود، به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \underline{c}^T \underline{x}$$

در رابطه فوق $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعداد حقیقی، $\underline{c}^T$ ترانهاده بردار c و بردارهای $\underline{c}$ و $\underline{x}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

در این روش فرض می‌شود که کلیه محدودیت‌ها و تابع هدف خطی و تمامی متغیرهای تصمیم، غیر منفی باشند. اگر متغیر تصمیم‌گیری فقط دارای مقدار منفی باشد آنگاه متغیر جدیدی به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$x_i' = -x_i$$

و در صورتی‌که متغیر تصمیم‌گیری بتواند هر دو مقدار مثبت و منفی را اختیار کند، متغیرهای جدیدی به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$x_i = x_i' - x_i''$$
$$x_i', x_i'' \geq 0$$

مدل بهینه سازی خطی

محدودیت‌های خطی می‌توانند به صورت مساوی یا نامساوی باشند. محدودیت‌های تساوی و نامساوی به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

در برخی از روش‌های حل مسأله برنامه‌ریزی خطی، محدودیت‌ها باید تنها از نوع $\leq$ تعریف شوند بنابراین در حالاتی که محدودیت‌ها دارای علامت $\geq$ باشند با ضرب کردن ۱− در رابطه خواهیم داشت:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

اگر فرآیند بالا را برای تمامی متغیرها و محدودیت‌ها تکرار نمائیم، آن گاه متغیرها غیر منفی و به صورت نامساوی $\leq$ خواهند شد. بنابراین هر مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به شکل استاندارد زیر بیان شود:

$$\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

چنانچه تابع هدف نشان‌دهنده هزینه، مقدار آلودگی و نظایر آن باشد مقدار آن در مدل باید حداقل گردد. در این صورت به منظور تبدیل تابع هدف به شکل استاندارد، که در آن تابع هدف حداکثر می‌شود، باید معادلهٔ تابع هدف را در (۱−) ضرب نمود.

مدل بهینه سازی خطی

پارامترها	واژه‌های به‌کارگرفته‌شده در مدل	مفهوم واژه در قالب یک مسئلهٔ تولید	نماد استفاده‌شده
	فعالیت	تولید محصولات مختلف (مثلاً دو محصول A و B)	توصیفی
	متغیرهای تصمیم سطح فعالیت‌ها (یک متغیر برای هر فعالیت)	مقدار تولید از هر محصول A و B در دورهٔ زمانی تولید که با x_1 و x_2 نشان داده می‌شوند	$x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n$
	تابع هدف مشارکت کلیهٔ فعالیت‌ها در راستای دستیابی به اهداف	کل سود به‌دست‌آمدهٔ ناشی از فروش محصولات A و B (یا مجموع هزینهٔ ناشی از تولید محصولات)	$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
	ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف سهم مشارکت هر واحد فعالیت در دستیابی به هدف	سود (یا هزینهٔ) ناشی از فروش (یا تولید) هر واحد محصول A و B	$c_1, c_2, \cdots, c_j, \cdots, c_n$
پارامترها	اعداد سمت راست در محدودیت‌ها میزان منابع، ظرفیت‌ها یا امکانات موجود برای دستیابی به هدف	مواد اولیه، نفرـساعت نیروی انسانی، ظرفیت ماشین‌آلات و...	b_1 $\vdots$ b_i $\vdots$ b_m
	ضرایب فنی یا تکنولوژیک میزان منابع، ظرفیت‌ها یا امکانات لازم برای انجام هر فعالیت	مثلاً مقدار مواد اولیه یا میزان ساعت کار لازم برای ساخت یک واحد محصول A یا B	$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{1n}$ $\vdots$ $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}$ $\vdots$ $a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mj}, \cdots, a_{mn}$

نمادها و مفاهیم مورد استفاده در مدل های برنامه ریزی خطی

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_i$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_m$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ یا (متغیرهای آزاد در علامت)

که در آن:

$x_j, (j = 1, \cdots, n)$: مقدار متغیرهای تصمیم

Z : مقدار تابع هدف

$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$: ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف

$a_{1n}, a_{2n}, \cdots a_{in}$: ضرایب متغیرهای تصمیم در محدودیت‌ها

$(b_1, b_2, \cdots, b_m)$: اعداد سمت راست

n : تعداد متغیرهای تصمیم

m : تعداد محدودیت‌ها

مدل بهینه سازی خطی

در یک مدل بهینه سازی خطی، به طور کلی دو دسته روابط به صورت تابع هدف و قیدها مشاهده می شوند.

الف) **تابع هدف** که جهت و سوی مورد نظر و مطلوب در مسئله بهینه سازی را نشان می دهد. مقدار این رابطه مشخص کننده مطلوبیت و یا برتری یک مجموعه از متغیرهای تصمیم بر مجموعه ای دیگر است طبق خصوصیت ها و شرایط این رابطه می توان دریافت که چه مقدارهایی برای متغیرهای تصمیم بهینه می باشند. تابع هدف اصلی ترین جز یک مدل بهینه سازی است.

ب) **قیدها یا محدودیت های مسئله** که با توجه به شرایط فیزیکی مسئله مورد نظر تعریف می شوند و می توان آن ها را به دو دسته کارکردی (Technical) و غیرکارکردی (Non-Technical) تقسیم کرد.

قیدهای کارکردی: آن دسته از محدودیت ها هستند که با توجه به محدودیت منابع در هر مسئله تعریف می شوند.

قیدهای غیرکارکردی: با توجه به محدوده مجاز برای انتخاب متغیرهای تصمیم تعیین می شوند.

بنابراین فضای تصمیم مسئله (مجموعه نقاطی که در آن انتخاب مقدار برای متغیرهای تصمیم انجام می شود) توسط قیدهای غیر کارکردی ایجاد می شود و این فضا توسط قیدهای کارکردی به دو قسمت فضاهای تصمیم موجه و ناموجه تقسیم می گردد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\\
&\text{Subject to :}\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m\\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

فرضیات مدل های برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی دارای فرض هایی است که در رابطه های آن نهفته است و اگر در مسئله ای چهار شرط زیر برقرار باشد آنگاه می توان برای حل آن از روش های برنامه ریزی خطی استفاده کرد:

الف) **تناسب (Proportionality):** فرض تناسب بدان معنا است که هر یک از متغیرهای تصمیم به تنهایی و مستقل از سایر متغیرهای تصمیم بر روی تابع هدف تأثیر می گذارند یعنی اگر مقدار یکی از متغیرهای تصمیم افزایش یا کاهش یابد مقدار Z نیز با توجه به رابطه ریاضی تابع هدف تغییر خواهد کرد و این تغییر مستقل از مقدارهای بقیه متغیرهای تصمیم است. به همین ترتیب تأثیر تغییر مقدار این متغیر در رابطه قیدها نیز مستقل از سایر متغیرها است.

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

ب) **جمع پذیری (Additivity):** فرض تناسب به تنهایی برای خطی بودن تابع هدف و قیدهای مسئله کافی نیست. اگر بین برخی از فعالیت ها روابط متقابلی وجود داشته باشد، آنگاه عبارت هایی ضربی خواهیم داشت که در آن صورت دیگر مسئله خطی نخواهد بود. فرض جمع پذیری به معنای آن است که بین هیچ یک از متغیرها چنین رابطه های متقابلی وجود ندارد. بنابراین مقدار تابع هدف از مجموع مقدارهای متغیرهای تصمیم ضرب در ضریب های تابع هدف (C) بدست می آیند و در قیدها نیز مجموع حاصلضرب ضریب های قیدها در مقدارهای متغیرهای تصمیم نسبت به مقدار سمت راست نامعادله سنجیده و مورد مقایسه قرار می گیرند به این ترتیب برقراری یا عدم برقراری قید مورد نظر تعیین می شود.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1$$

فرضیات مدل های برنامه ریزی خطی

ج) بخش پذیری (Divisibility): بخش پذیری بدان معنا است که مقدار متغیرهای تصمیم در یک مسئله برنامه ریزی خطی به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است. لذا مقدار متغیرهای تصمیم یک مسئله برنامه ریزی خطی می تواند اعشاری باشد و جستجوی بهینه در فضای پیوسته غیرصحیح صورت می پذیرد. هر چند بسیاری از مسائل مهندسی تنها در فضای ناپیوسته (صحیح، گسسته و دودویی) معنی خواهند داشت، اما این بدان معنی نیست که حل آنها با استفاده از روش برنامه ریزی خطی ممکن نیست. $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$

ج) معین بودن (Deterministic): فرض معین بودن بدان معنا است که در یک مسئله برنامه ریزی خطی تمام نمایه های مدل ریاضی اعم از ضرایب تابع هدف (c)، ضرایب سمت چپ (a) و مقدارهای سمت راست قیدها (b) همگی معلوم و دارای مقدار ثابت باشند. مسئله های برنامه ریزی خطی می توانند برای تصمیم گیری ها و برنامه ریزی های آتی در شرایطی مورد استفاده قرار گیرند که در آن ها مقدار ضریب های مذکور بر اساس پیش بینی ها و برآوردهای آینده تعیین می شوند. بنابراین تمامی این نمایه ها دارای عدم قطعیت هایی خواهند بود و جنبه احتمالاتی دارند. لذا تحلیل حساسیت بر روی این نمایه ها جهت کسب اطمینان از جواب بدست آمده بسیار مفید خواهد بود. با تحلیل حساسیت می توان اهمیت هر یک از نمایه ها را تعیین و سپس با دقت بیشتری به برآورد نمایه های تأثیرگذار در جواب مسئله پرداخت. به این ترتیب اطمینان طراح از بهینه بودن طراحی ارائه شده و کارآیی آن بیشتر خواهد شد.

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

مثال ۱) برای تأمین نیاز m مصرف مختلف لازم است توسط n پمپ برداشت صورت گیرد. قیمت واحد هزینه برق مصرفی پمپ j برابر با C_j است. هر کدام از i مصرف کننده نیز روزانه معادل b_i آب مصرف می کنند. میزان آبی که توسط هر پمپ j به مصرف کننده i تخصیص داده می شود برابر با a_{ij} است. اگر میزان آبی که توسط پمپ j پمپاژ می شود برابر با x_j در نظر گرفته شود، مدل برنامه ریزی خطی جهت یافتن بهترین مقادیر x_j جهت دستیابی به کمترین هزینه و تأمین نیازهای مصارف مختلف را ارائه نمائید.

Minimize $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

تابع هدف: حداقل نمودن مجموع هزینه های پمپاژ

Subject to :

محدودیت ها:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

مجموع میزان آب تخصیص داده شده به نیاز iام توسط n پمپ باید بزرگتر از نیاز آب روزانه آن مصرف کننده (b_i) باشد.

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

میزان آب تخصیص داده شده توسط پمپ iام باید غیرمنفی باشد.

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

مثال ۲) جهت تأمین نیاز m مصرف مختلف لازم است از n منابع آب، برداشت صورت گیرد. هزینه تخصیص از منبع i به مصرف j به ازای هر واحد تخصیص معادل برابر با C_{ij} است. در صورتی که میزان نیاز هر مصرف کننده معادل b_j و میزان آبی که می توان توسط هر منبع برداشت نمود برابر با a_i باشد، مدل برنامه ریزی خطی جهت یافتن بهترین مقادیر تخصیص از هر منبع به هر مصرف کننده (x_{ij}) جهت محقق شدن کمترین هزینه و تأمین نیازهای مصارف مختلف را ارائه نمائید.

تابع هدف: حداقل نمودن مجموع هزینه های تخصیص

$$\text{Minimize } Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

محدودیت ها:

Subject to :

مجموع میزان آب تخصیص داده شده به مصارف باید برابر با کل نیاز آن مصرف کننده باشد.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

مجموع میزان آب تخصیص داده شده از هر منبع باید برابر با کل مقدار مجاز برداشت از آن منبع باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad j = 1,2,\dots,m$$

میزان آب تخصیص داده شده از هر منبع به هر مصرف کننده باید غیرمنفی باشد.

$$x_{ij} \geq 0$$

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

مثال ۳) در یک مسئله بهره برداری از مخزن، هزینه ذخیره سازی آب در مخزنی با ظرفیت C برای هر واحد آب و در تمامی دوره های زمانی برابر r فرض می شود. همچنین مخزن در آغاز دوره زمانی خالی بوده و در پایان آخرین دوره نیز باید خالی شود. در صورتی که قیمت فروش هر واحد آب در زمان t برابر با c_t باشد، مدل برنامه ریزی خطی جهت حداکثر نمودن میزان سود ناشی از بهره برداری از این مخزن در طی یک دوره زمانی n ماهه را توسعه دهید.

تابع هدف: حداکثر نمودن سود ناشی از بهره برداری از مخزن

$$\text{Maximize } Z=\sum_{t=1}^{n}(c_tR_t-rS_t)$$

محدودیت ها:

Subject to :

محدودیت بیلان آب مخزن

$$S_{t+1}=S_t+I_t-R_t, \qquad t=1,2,\dots,n-1$$

محدودیت ظرفیت مخزن

$$S_{t+1}\le C \quad , \qquad i=1,2,\dots,n-1$$

محدودیت خالی بودن مخزن در آغاز و پایان دوره

$$S_1=0$$

$$S_n+I_n-R_n=0$$

غیرمنفی بودن متغییرهای تصمیم و حالت

$$R_t,S_t,I_t\ge 0 \quad ,t=1,2,\dots,n$$

R_t: میزان آب فروخته شده در زمان t است (متغییر تصمیم).

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

مثال ۴) در یک منطقه کشاورزی با سه مزرعه، تعاونی کشاورزان تصمیم دارد تا عملیات کاشت داشت و برداشت را با همکاری کشاورزان انجام دهد. برای این منظور عامل های محدود کننده شامل آب و زمین می باشند. در این منطقه امکان کاشت سه محصول چغندر قند، پنبه و ذرت وجود دارد. هدف در این مسئله کسب بیشینه سود ممکن برای تعاونی کشاورزان است. برای این منظور طبق توافق کشاورزان، ضمن عدم وجود تفاوت در نوع محصول کشت شده، درصد زمین کشت شده در هر سه مزرعه باید برابر باشد.

مدل برنامه ریزی خطی جهت تعیین سطح زیر کشت هر محصول در هر یک از مزرعه ها ارائه نمائید.

جدول داده‌های آب و زمین

مزرعه	سطح قابل کشت (هکتار)	منابع آب موجود (هزار مترمکعب)
۱	۴۰۰	۶۰۰
۲	۶۰۰	۸۰۰
۳	۳۰۰	۳۷۵

جدول داده‌های نیاز آبی، سود و بیش‌ترین مساحت قابل کشت

محصول	نیاز آبی (هزار مترمکعب در هر هکتار)	سود (دلار به‌ازای هر هکتار)	بیش‌ترین مساحت قابل کشت (هکتار)
چغندر قند	۳	۴۰۰	۶۰۰
پنبه	۲	۳۰۰	۵۰۰
ذرت	۱	۱۰۰	۳۲۵

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

تعریف متغییرهای تصمیم مسأله مورد بررسی:

متغیرهای تصمیم (هکتار)			
محصول	مزرعه		
	۱	۲	۳
چغندر قند	x_1	x_2	x_3
پنبه	x_4	x_5	x_6
ذرت	x_7	x_8	x_9

Maximize $Z=400(x_1+x_2+x_3)+300(x_4+x_5+x_6)+100(x_7+x_8+x_9)$

Subject to :

محدودیت های سطح قابل کشت در هر مزرعه

$$x_1+x_4+x_7 \le 400$$
$$x_2+x_5+x_8 \le 600$$
$$x_3+x_6+x_9 \le 300$$

محدودیت های آب موجود

$$3x_1+2x_4+x_7 \le 600$$
$$3x_2+2x_5+x_8 \le 800$$
$$3x_3+2x_6+x_9 \le 375$$

محدودیت سطح قابل کشت هر محصول

$$x_1+x_2+x_3 \le 600$$
$$x_4+x_5+x_6 \le 500$$
$$x_7+x_8+x_9 \le 325$$

برابری درصد زیرکشت محصولات در سه مزرعه

$$\frac{x_1+x_4+x_7}{400}=\frac{x_2+x_5+x_8}{600}$$
$$\frac{x_2+x_5+x_8}{600}=\frac{x_3+x_6+x_9}{300}$$

نامنفی بودن سطح زیرکشت

محصولات (متغییر تصمیم)

$$x_i \ge 0 \ , i=1,2,\dots,9$$

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

مثال ۵) در یکی از حوضه های اصلی کشور با سه زیر حوضه فرعی، اتخاذ تصمیم در مورد افزایش سطح زیر کشت برنج یا گندم مورد نظر است. عامل محدود کننده در مورد این تصمیم، منابع آب موجود در منطقه هستند و از نظر خاک حاصلخیز محدودیتی وجود ندارد. تأمین آب مورد نیاز جهت افزایش سطح زیر کشت این دو محصول باید از زیر حوضه های فرعی حوضه اصلی صورت گیرد. از طرفی با توجه به موقعیت جغرافیایی زمین های در نظر گرفته شده برای توسعه، انتقال آب از زیر حوضه ها با محدودیت هایی روبه رو است. به طوری که انتقال آب از زیر حوضه های ۱ و ۳ برای منطقه های تحت توسعه برنج ممکن بوده و از حوضه های ۲ و ۳ نیز برای منطقه های تحت توسعه گندم ممکن خواهد بود. به تعبیر دیگر انتقال آب از زیر حوضه ۲ برای منطقه های تحت توسعه برنج و همچنین از زیر حوضه ۱ برای منطقه های تحت توسعه گندم ممکن نیست. از طرفی منابع آب موجود قابل استفاده در زیر حوضه های ۱ ، ۲ و ۳ به ترتیب معادل حجم های ۴، ۱۲ و ۱۸ هزار مترمکعب در سال می باشند.

جدول مقابل در ازای هر واحد افزایش سطح کشت برنج و گندم، حجم های آبی که باید از هر زیرحوضه به منطقه های تحت کشت انتقال یابد را نشان می دهد. مدل برنامه ریزی خطی با هدف افزایش مساحت تحت کشت هر محصول در هر زیرحوضه را توسعه دهید.

جدول داده‌های افزایش سطح زیر کشت

زیرحوضه	حجم‌های آب انتقالی از هر زیرحوضه برای هر محصول (هزار مترمکعب در سال بر واحد مساحت زیر کشت): برنج	گندم	منابع آب موجود در هر زیرحوضه (هزار مترمکعب در سال)
۱	۱	۰	۴
۲	۰	۲	۱۲
۳	۳	۲	۱۸
سود محصول (میلیون تومان در سال بر واحد مساحت زیر کشت)	۳	۵	

مثال های کاربردی برنامه ریزی خطی در منابع آب

متغییر تصمیم: میزان افزایش سطح زیرکشت برنج (x_1) و گندم (x_2)

Maximize $Z=3x_1+5x_2$ حداکثر نمودن سود حاصل از افزایش سطح زیرکشت محصولات برنج و گندم

Subject to :

$x_1 \leq 4$ محدودیت منابع آب موجود در حوضه ۱

$2x_1 \leq 12$ محدودیت منابع آب موجود در حوضه ۲

$3x_1+2x_2 \leq 18$ محدودیت منابع آب موجود در حوضه ۳

$x_1, x_2 \geq 0$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

به طور کلی دو روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی وجود دارد که عبارتند از:

۱- روش ترسیمی   ۲- روش سیمپلکس (Simplex)

۱- روش ترسیمی: این روش برای حل مسائل دو متغیره و حداکثر سه متغیره قابل استفاده می باشد. همچنین امکان استفاده از این روش برای مدل های غیر خطی که در آنها تابع هدف خطی و قیدها غیرخطی باشند نیز وجود دارد. مراحل این روش به صورت زیر است:

- **تعیین فضای تصمیم با ترسیم قیدهای مسئله:** لازم است هر یک از محورهای مختصات به متغییرهای تصمیم اختصاص یابد. بر این اساس فضای تصمیم موجه و غیرموجه مشخص می گردد. فصل مشترک قیدهای ترسیم شده، منطقه موجه را تعیین می نماید.
- **ایجاد تغییر در تابع هدف و ترسیم آن:** با تغییر شکل رابطه ریاضی تابع هدف (Z) به گونه ای که Z به عنوان عرض از مبدأ در رابطه قرار گیرد، یکی از متغییرهای تصمیم بر مبنای سایر متغییرهای تصمیم و Z محاسبه شود. با انتخاب یک مقدار اولیه برای Z و ترسیم آن می توان نقطه بهینه را یافت. در صورتی که تابع هدف حداکثرسازی باشد، خط ترسیم شده را به موازت خود در جهت افزایش Z حرکت می دهیم و در تابع حداقل سازی بالعکس. آخرین نقطه ای که این خط، فضای موجه را قطع می کند به عنوان جواب بهینه در نظر گرفته می شود.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

مثال) مسئله برنامه ریزی خطی زیر را حل نمائید.

Maximize $Z=3x_1+5x_2$

Subject to :

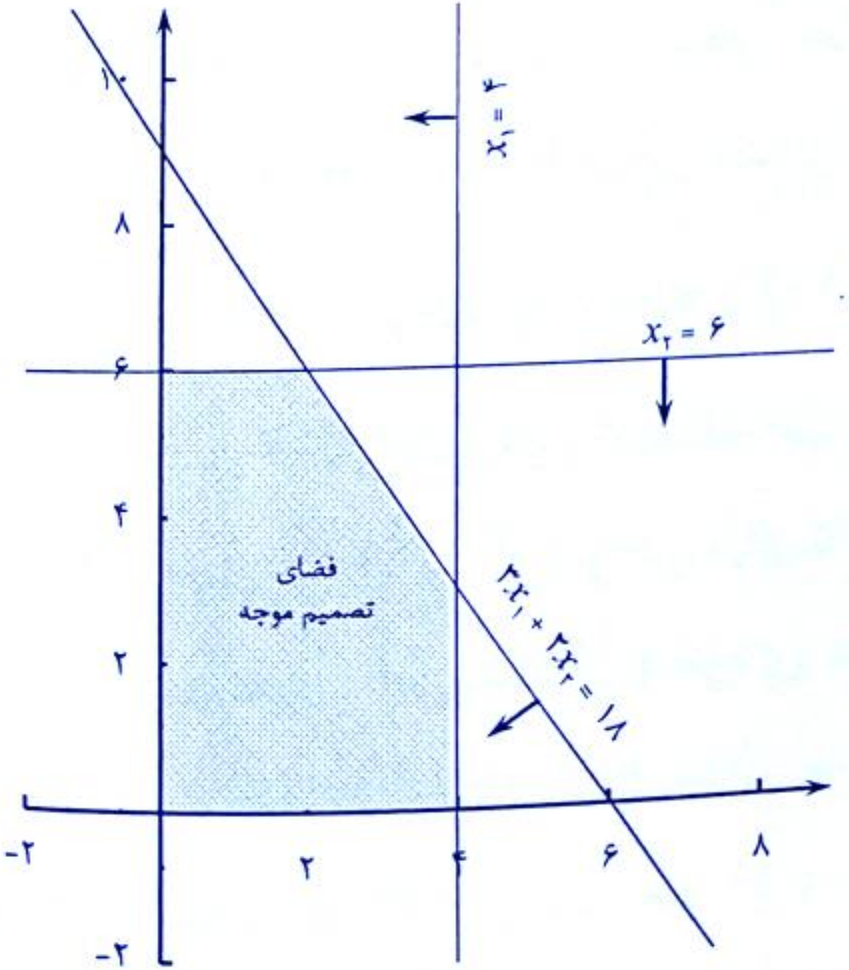
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1+2x_2 \leq 18$

$x_1 , x_2 \geq 0$

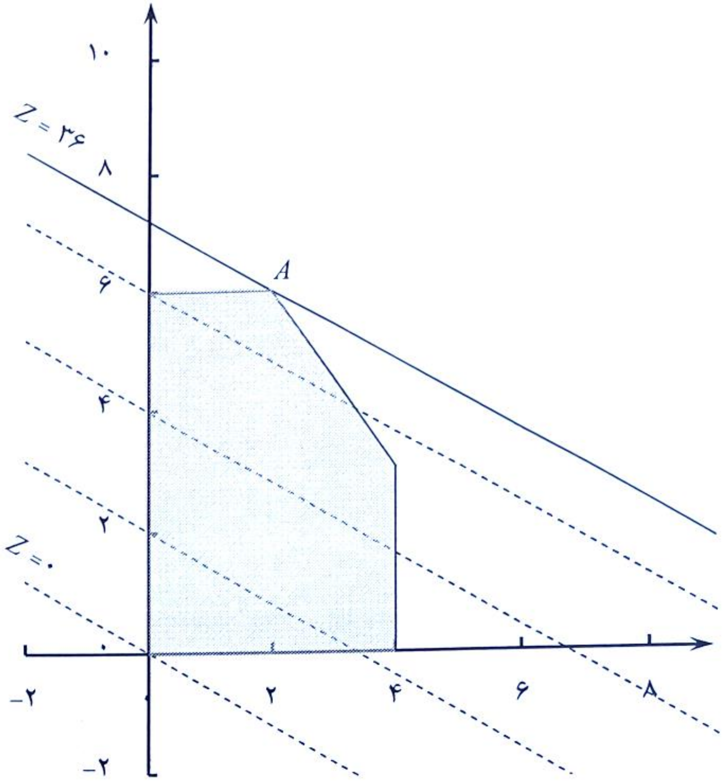
حل) ۱- ترسیم فضای تصمیم با استفاده از رابطه محدودیت ها



۲- تغییر شکل رابطه تابع هدف و ترسیم آن به ازای مقدار صفر

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$$

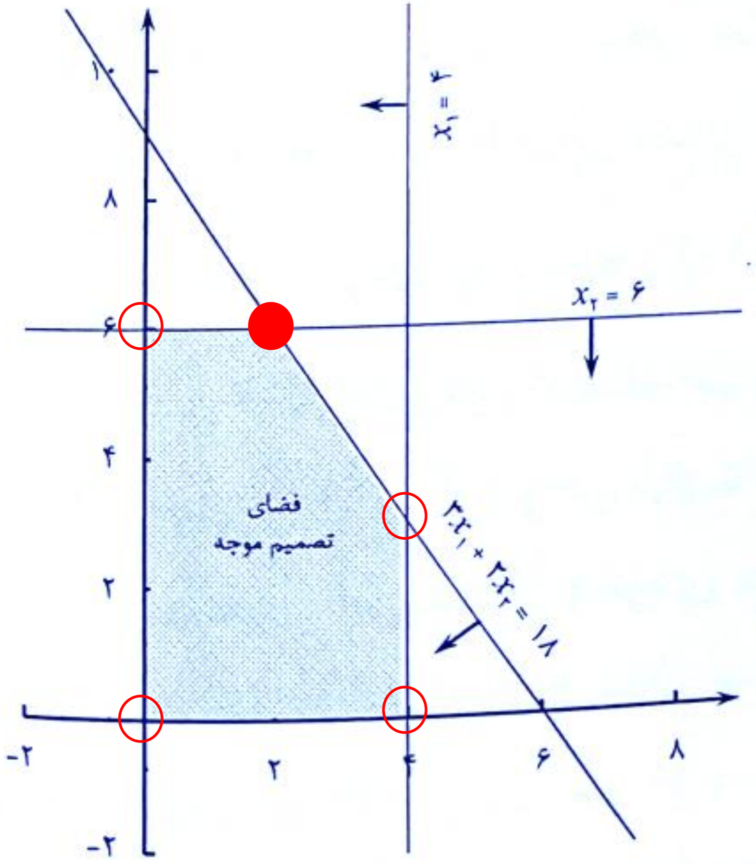
۳- با جابجایی خط ترسیم شده در جهت افزایش مقدار Z، می توان نقطه بهینه (نقطه A) با مختصات (2,6) را تعیین نمود. به ازای این مقدار بهینه، مقدار تابع هدف برابر با ۳۶ خواهد شد.



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

رویکرد دیگری که برای حل با روش ترسیم می توان بکار برد، با حل دستگاه معادلات محدودیت هایی که تشکیل دهنده نقاط گوشه فضای تصمیم موجه می باشد، مختصات نقاط گوشه تعیین شود. سپس به ازای هر نقطه گوشه، مقدار Z تعیین و در مسائل حداکثرسازی (بیشتری مقدار Z) و در مسائل حداقل سازی (کمترین مقدار Z) استخراج و به عنوان مقدار بهینه تابع هدف معرفی شود.

مختصات نقاط گوشه موجه	مقدار $Z=3x_1+5x_2$
(0,6)	30
(2,6)	**36**
(4,3)	27
(4,0)	12
(0,0)	0

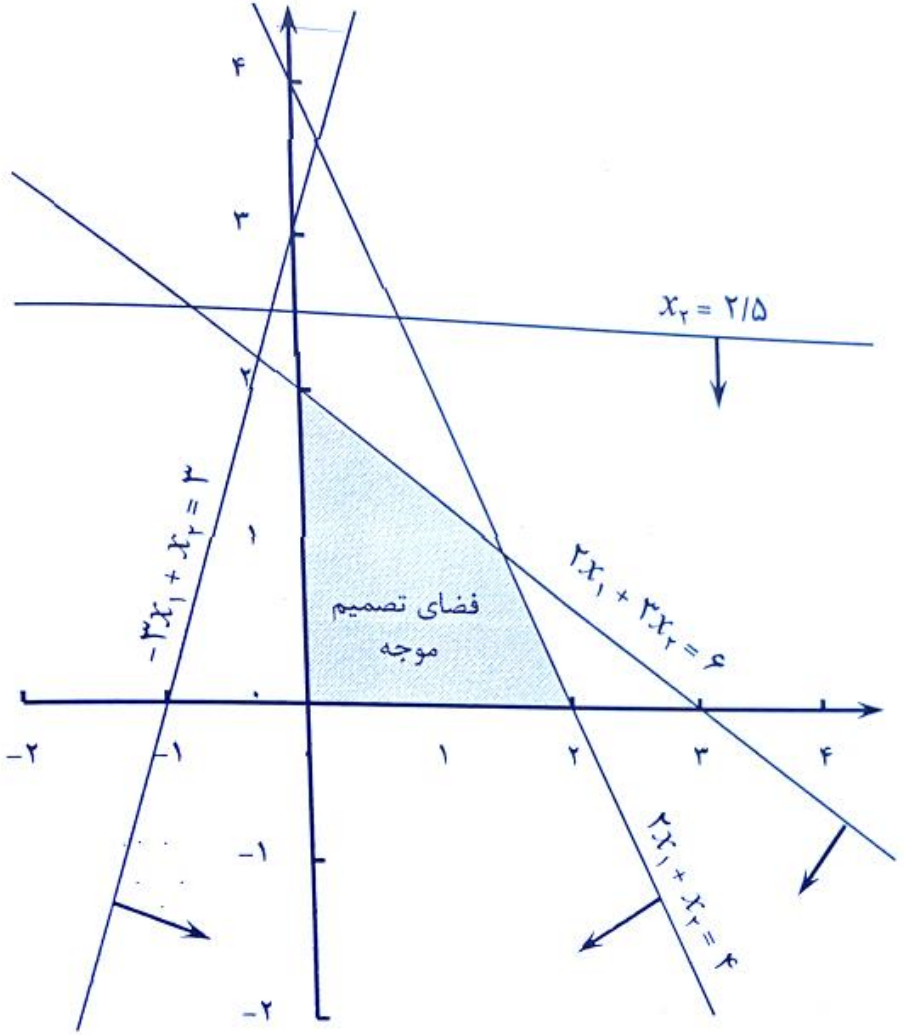


نکته: اگر یک نقطه گوشه موجه بهتر از تمام نقاط گوشه موجه مجاور خودش باشد، لذا از تمام نقاط گوشه موجه دیگر بهتر است. لذا نیازی به بررسی تمامی نقاط گوشه موجه نمی باشد. لازم به ذکر است شرط برقراری این ویژگی، محدب بودن فضای تصمیم است که در مسائل برنامه ریزی خطی، این امر محقق می شود.

مثال) مسئله برنامه ریزی خطی زیر را حل نمائید.

Maximize $Z=4x_1+3x_2$
Subject to :
$2x_1+3x_2\le 6$
$-3x_1+x_2\le 3$
$2x_2\le 5$
$2x_1+x_2\le 4$
$x_1\,,x_2\ge 0$

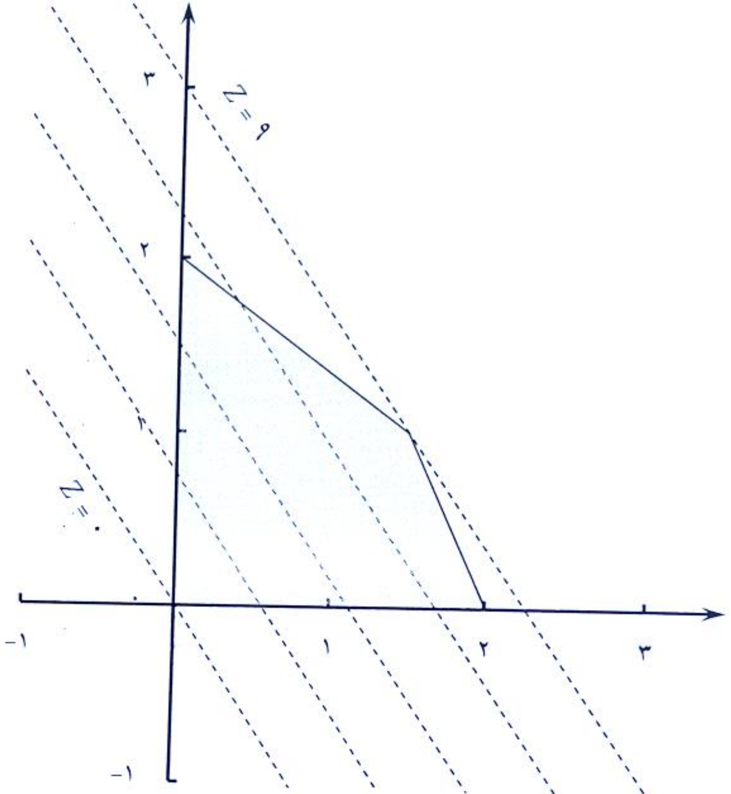
حل) ۱– ترسیم فضای تصمیم با استفاده از رابطه محدودیت ها



۲– تغییر شکل رابطه تابع هدف و ترسیم آن به ازای مقدار صفر

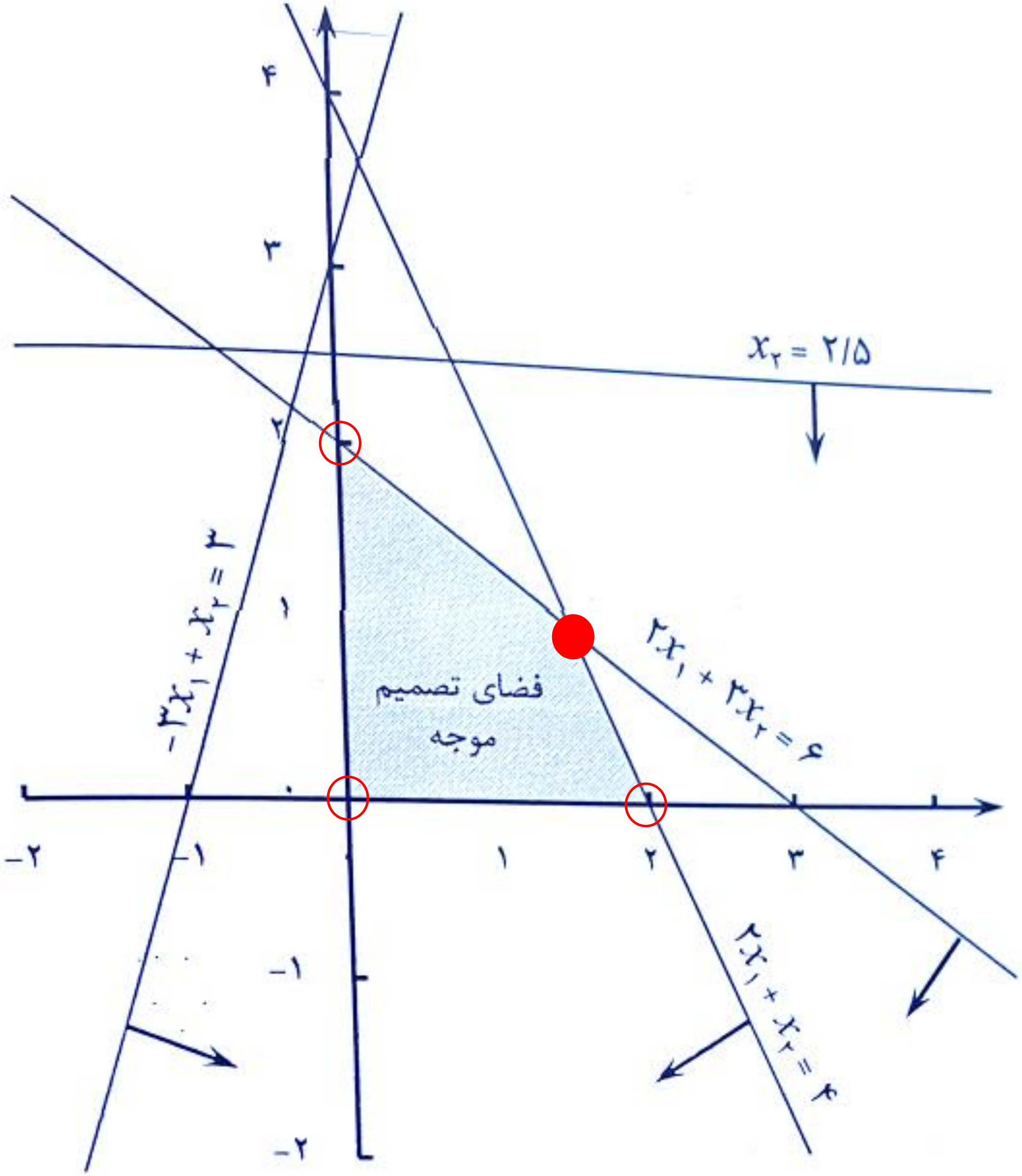
$$x_2=-\frac{4}{3}x_1+\frac{1}{3}Z$$

۳– با جابجایی خط ترسیم شده در جهت افزایش مقدار Z، می توان نقطه بهینه با مختصات (1.5,1) را تعیین نمود. به ازای این مقدار بهینه، مقدار تابع هدف برابر با ۹ خواهد شد.



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

رویکرد دوم: جستجو در بین نقاط گوشه



مقدار $Z=4x_1 + 3x_2$	مختصات نقاط گوشه موجه
6	(0,2)
9	**(1.5,1)**
8	(2,0)
0	(0,0)

مدل بهینه سازی خطی

مثال) برای تصفیه فاضلاب امکان استفاده از سه روش وجود دارد. این روش‌ها به ترتیب مقادیر ۱، ۲ و ۳ گرم در متر مکعب از غلظت آلودگی را کاهش می‌دهند. روش سوم نمی‌تواند بیش از ۵۰ درصد حجم فاضلاب را تصفیه نماید. هزینه‌های به کارگیری هر یک از این سه روش به ترتیب ۵، ۳ و ۲ دلار در هر متر مکعب برآورد شده است. چنانچه لازم باشد مقدار ۱۰۰۰ متر مکعب فاضلاب تصفیه گردد و حداقل به میزان ۱/۵ گرم در متر مکعب غلظت آلودگی کاهش داده شود، یک مدل بهینه‌یابی خطی برای انتخاب سیاست‌های تصفیه بهینه تدوین نمایید.

حل) در این مثال متغیرهای تصمیم‌گیری، میزان تصفیه با استفاده از روش‌های مختلف می‌باشد. بنابراین سه متغیر تصمیم وجود دارد. در این حالت برای کاهش ابعاد مسأله و حل آن به صورت ترسیمی، از وابستگی این سه متغیر استفاده می‌گردد (مجموع هر سه، مقداری ثابت می‌باشد). بنابراین اگر x_1 و x_2 مقدار فاضلاب تصفیه شده با استفاده از روش‌های ۱ و۲ بر حسب مترمکعب باشند، حجم لازم برای تصفیه فاضلاب به روش سوم برابر با $1000 - x_1 - x_2$ خواهد بود:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$1000 - x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 1000$$

مدل بهینه سازی خطی

محدودیت‌های خطی می‌توانند به با توجه به این‌که نمی‌توان روش سوم را برای بیش از ۵۰ درصد حجم فاضلاب تصفیه نمود، خواهیم داشت:

$$1000 - x_1 - x_2 \leq 500 \quad \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 500$$

همچنین محدودیت تأمین حداقل تصفیه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_1 + 2x_2 + 3(1000 - x_1 - x_2) \geq 1.5 \times 1000 \quad \Rightarrow 2x_1 + x_2 \leq 1500$$

مقدار هزینه کل نیز برابر است با:

$$5x_1 + 3x_2 + 2(1000 - x_1 - x_2) = 3x_1 + x_2 + 2000$$

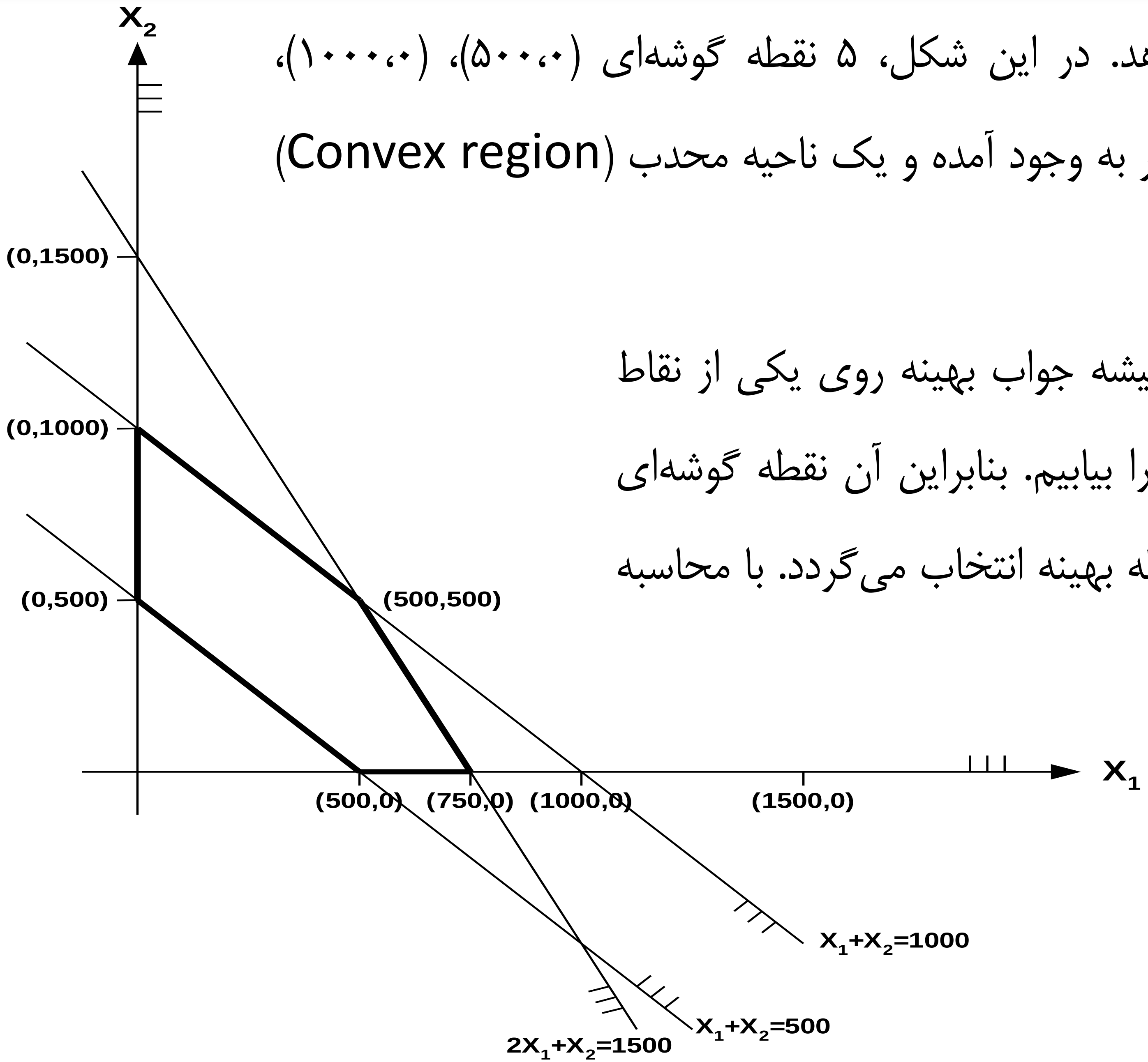
با توجه به این‌که ۲۰۰۰ مقداری ثابت می‌باشد، کافی است که فقط $3x_1 + x_2$ حداقل شود یا $-3x_1 - x_2$ حداکثر گردد. برای تبدیل کلیه محدودیت‌های نامساوی از حالت $\geq$ به $\leq$ کافی است آن‌ها را در منفی یک ضرب نمائیم. بنابراین شکل استاندارد مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} f = -3x_1 - x_2 \\
&\text{Subject to :} \\
&x_1, x_2 \geq 0 \\
&x_1 + x_2 \leq 1000 \\
&-x_1 - x_2 \leq -500 \\
&2x_1 + x_2 \leq 1500
\end{aligned}$$

هریک از محدودیت‌ها، فضای تصمیم‌گیری را محدودتر می‌نمایند.

مدل بهینه سازی خطی

شکل زیر مجموعه جواب امکان‌پذیر مسأله را نشان می دهد. در این شکل، ۵ نقطه گوشه‌ای (۰،۵۰۰)، (۰،۱۰۰۰)، (۵۰۰،۵۰۰)، (۷۵۰،۰)، (۵۰۰،۰) در فضای جواب‌های امکان‌پذیر به وجود آمده و یک ناحیه محدب (Convex region) را ایجاد کرده‌اند.



یکی از مهمترین قضایای برنامه‌ریزی خطی این است که همیشه جواب بهینه روی یکی از نقاط گوشه‌ای قرار دارد. لذا کافی است که بهترین نقطه گوشه‌ای را بیابیم. بنابراین آن نقطه گوشه‌ای که مقدار تابع هدف در آن بیشترین مقدار را دارد به عنوان نقطه بهینه انتخاب می‌گردد. با محاسبه مقدار تابع هدف در این نقاط، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$f(500,0) = -1500$$
$$f(750,0) = -2250$$
$$f(500,500) = -2000$$
$$f(0,1000) = -1000$$
$$f(0,500) = -500$$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

حالت های خاص در برنامه ریزی خطی:

- ❖ وجود قید زائد
- ❖ وجود معادلات مشابه
- ❖ عدم وجود جواب موجه
- ❖ منطقه موجه نامحدود (جواب نامحدود)
- ❖ جواب بهینه چندگانه (بی شمار جواب بهینه)
- ❖ مسئله تبهگن (Degenerate)

❖ وجود قید زائد

این حالت زمانی رخ می دهد که یکی از قیدها آن چنان فضای تصمیم موجه مسئله را محدود می سازد که یک یا چند قید دیگر بی اثر می شوند. در این حالت می توان قیدهای اضافی را از مدل حذف و مسئله را با قیدهای مؤثر در فضای تصمیم موجه حل نمود.

Maximize $Z=4x_1+3x_2$

Subject to :

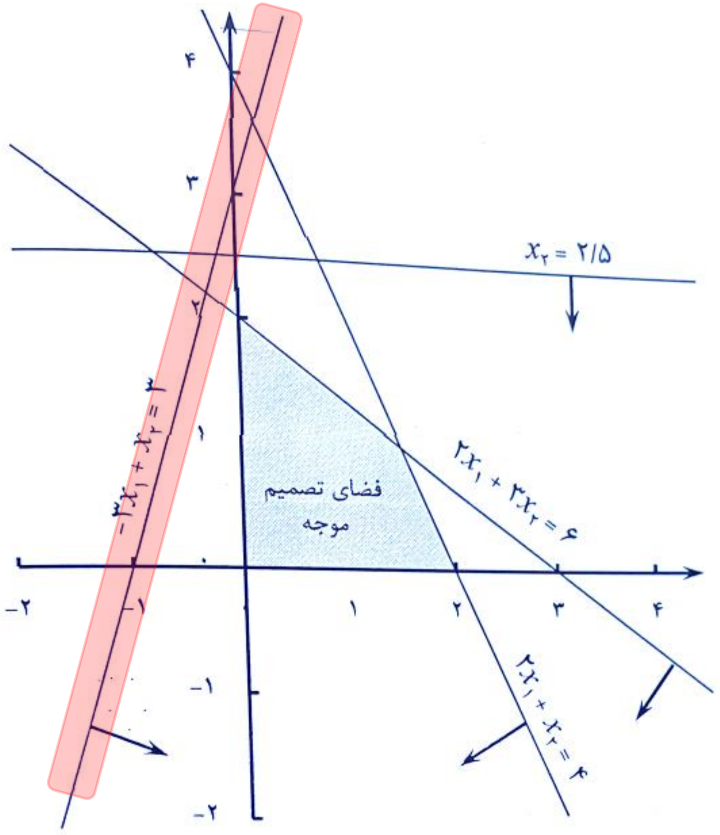
$2x_1+3x_2\leq 6$

$\boldsymbol{-3x_1+x_2\leq 3}$ **قید زائد**

$2x_2\leq 5$

$2x_1+x_2\leq 4$

$x_1 , x_2\geq 0$



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

❖ وجود معادلات مشابه

در صورتی که برخی از قیدها برهم منطبق باشند، این حالت رخ می دهد. به عبارت دیگر اگر یکی از قیدها در عددی ضرب و یا بر عددی تقسیم شود، قید تکرار ایجاد می گردد. در این حالت لازم است تنها یکی از این قیدها را نگه داشت و بقیه را حذف نمود.

Maximize $Z=4x_1 + 3x_2$

Subject to :

$2x_1 + 3x_2 \le 6$

$\mathbf{x_1 + 1.5x_2 \le 3}$ **قید تکراری**

$2x_2 \le 5$

$2x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 , x_2 \ge 0$

❖ عدم وجود جواب موجه

در صورتی که قیدهای مسئله هیچ فصل مشترکی با هم نداشته باشند، فضای تصمیم موجه ایی نیز وجود نخواهد داشت و لذا نمی توان برای این مسئله، جواب موجه تعیین نمود.

Maximize $Z=4x_1 + x_2$

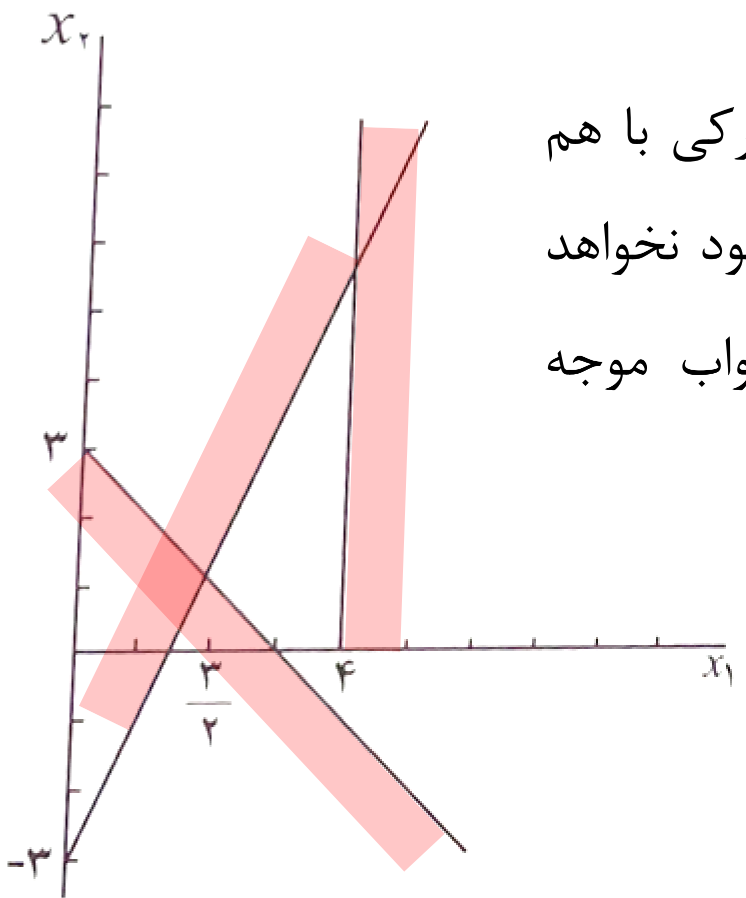
Subject to :

$x_1 + x_2 \le 3$

$2x_1 - x_2 \le 3$

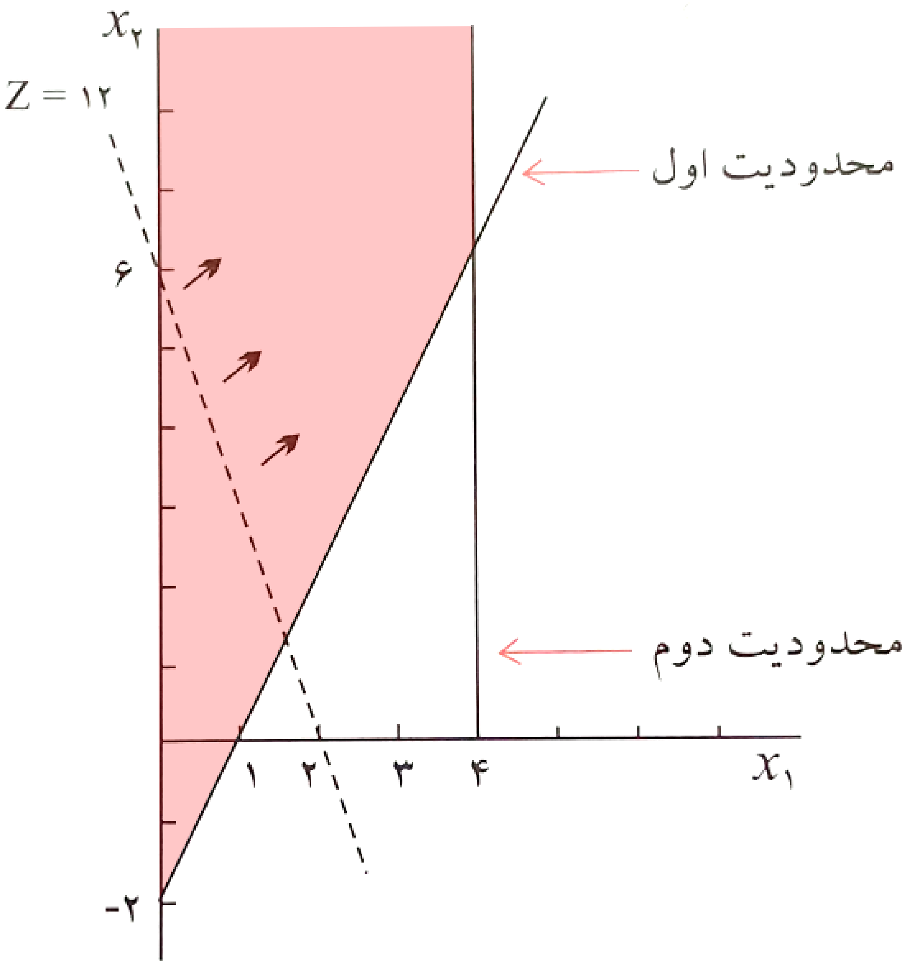
$x_1 \ge 4$

$x_1 , x_2 \ge 0$



❖ منطقه موجه نامحدود (جواب نامحدود)

در صورتی که محدوده فضای تصمیم موجه توسط قیدهای لازم محدود نشده باشد، منطقه موجه نامحدود خواهد شد. در این حالت جواب بهینه مسئله می تواند نامحدود و یا معین و محدود باشد.



$$\text{Maximize } Z=6x_1 + 2x_2$$

Subject to :

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

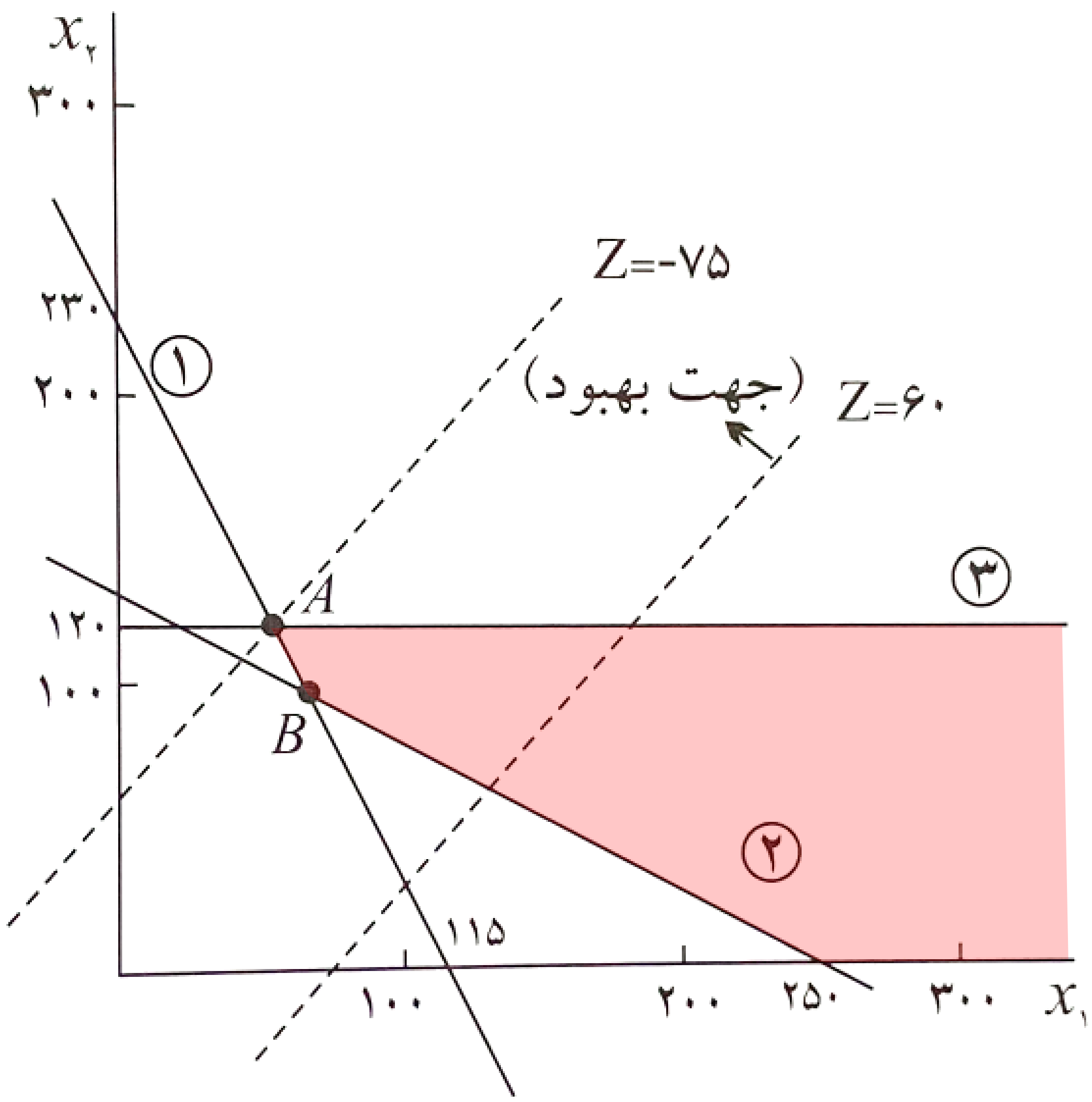
$$x_1 \leq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

فضای موجه نامحدود و
جواب بهینه نامحدود

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

به طور کلی دو روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی وجود



Minimize $Z=3x_1 - 2x_2$

Subject to :

$2x_1 + x_2 \geq 230$

$x_1 + 2x_2 \geq 250$

$x_2 \leq 120$

$x_1 , x_2 \geq 0$

فضای موجه نامحدود و
جواب بهینه محدود

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

❖ جواب بهینه چندگانه (بی شمار جواب بهینه) (Alternative optimal solution)

در صورتی تابع هدف با یکی از قیدهای مسئله (قیدی که در محل خروج تابع هدف از فضای تصمیم موجه) موازی باشد، در این حالت مدل برنامه ریزی خطی، دارای بی شمار جواب بهینه است و هر جواب مقدار یکسانی از تابع هدف را ارائه می دهند.

همانطور که مشاهده می شود، تابع هدف دقیقاً منطبق است بر محدودیت دوم. لذا تمامی نقاط واقع بر پاره خط AB به عنوان جواب بهینه در نظر گرفته می شوند.

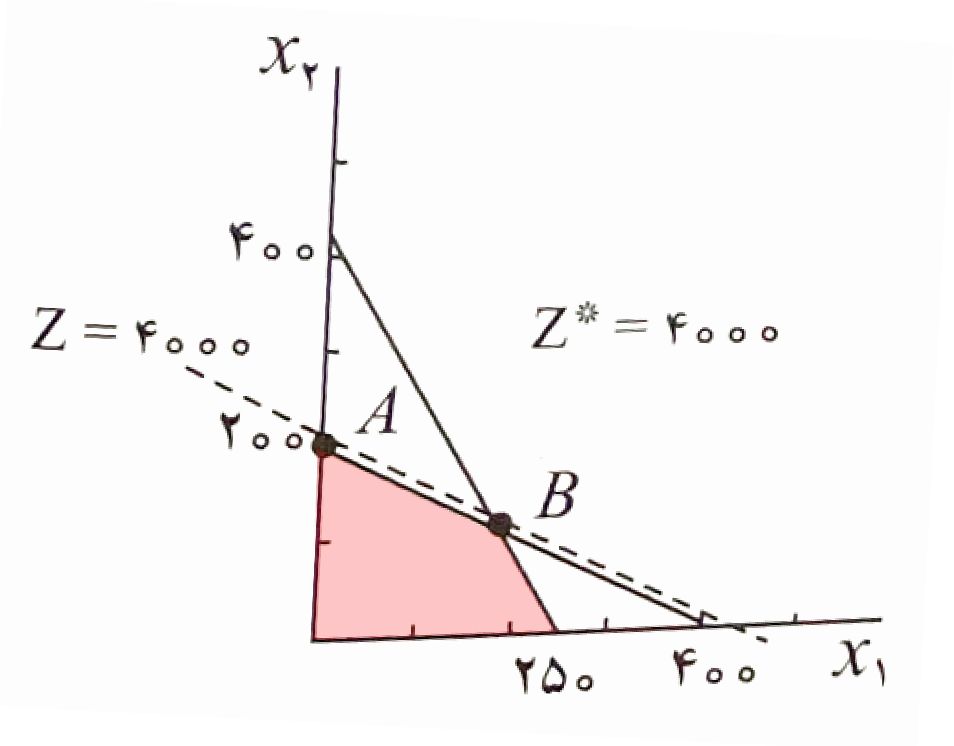
Maximize $Z=10x_1+20x_2$

Subject to :

$10x_1+6x_2 \leq 2500$

$5x_1+10x_2 \leq 2000$

$x_1 , x_2 \geq 0$



❖ مسئله تبهگن (Degenerate)

در یک مسئله برنامه ریزی خطی، هرگاه یک نقطه گوشه از محل تقاطع بیش از دو محدودیت (قید) بوجود آمده باشد، مسئله تبهگن است.

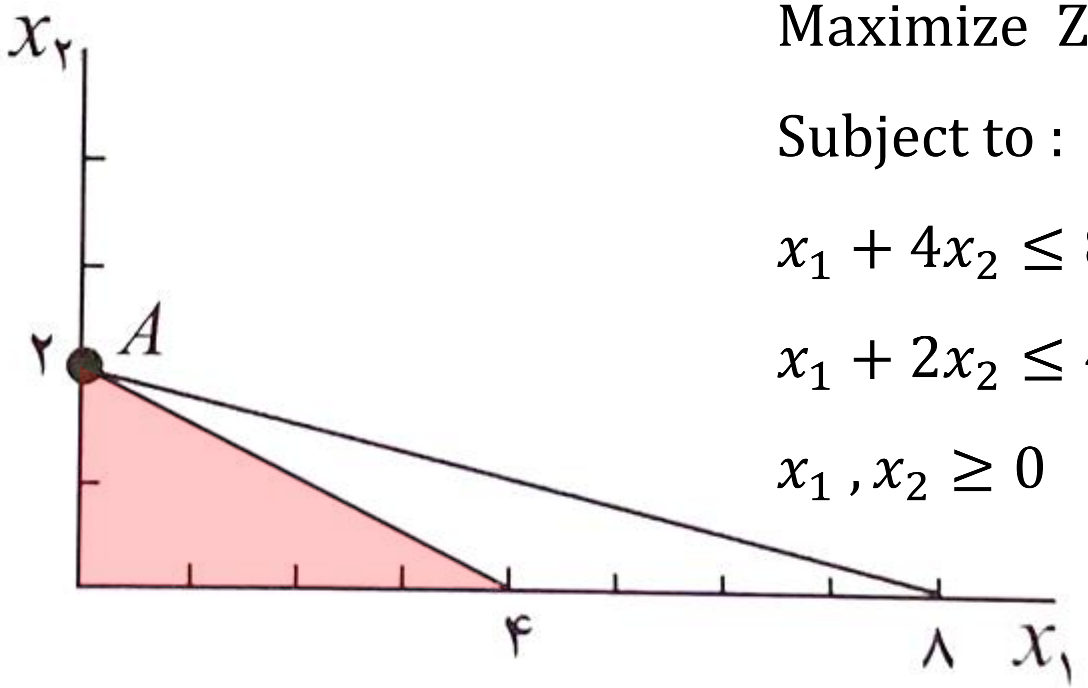
$$\text{Maximize } Z=3x_1+9x_2$$

Subject to :

$$x_1+4x_2 \le 8$$

$$x_1+2x_2 \le 4$$

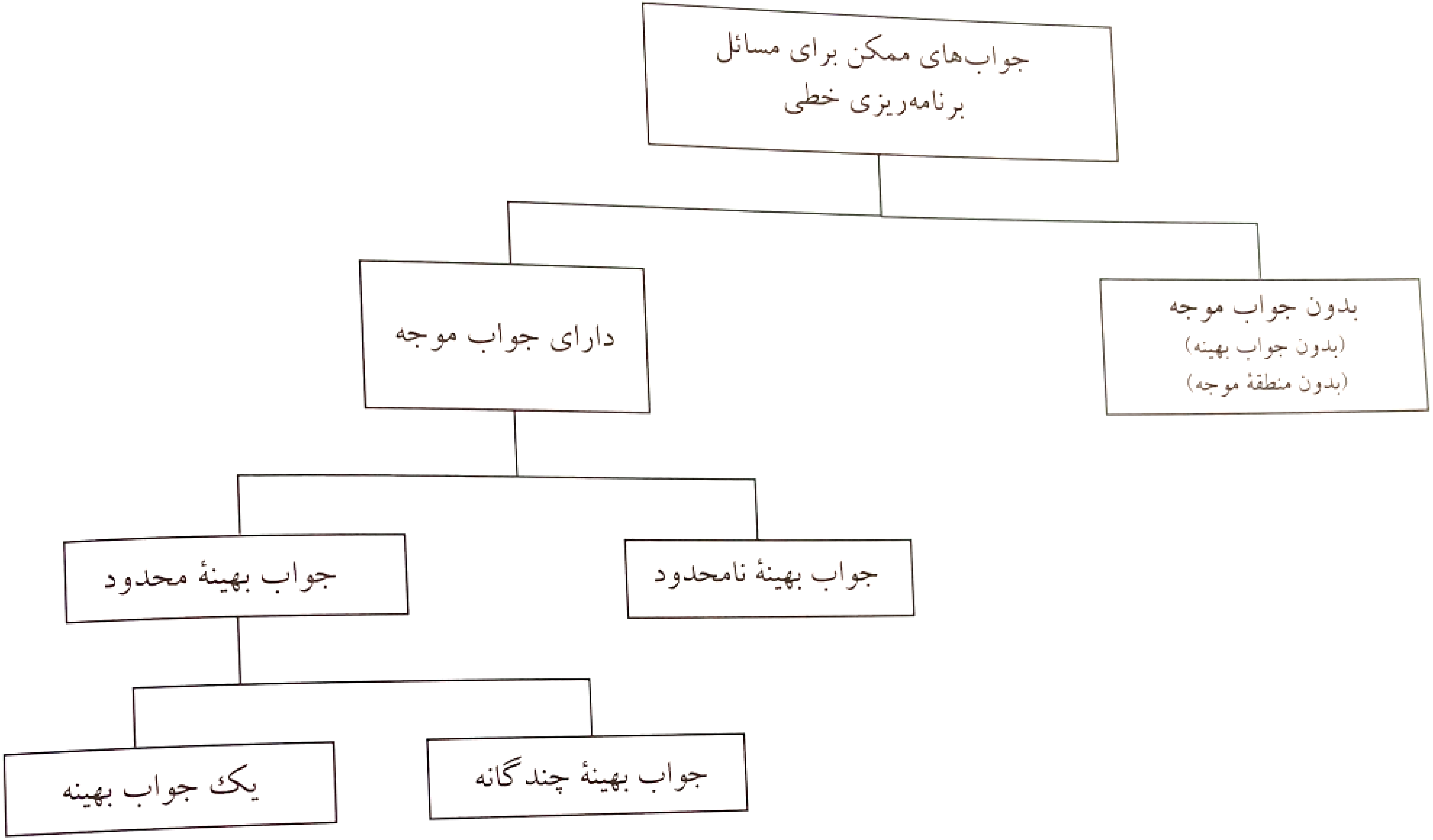
$$x_1 , x_2 \ge 0$$



این حالت در روش سمپلکس، که هر تکرار نشان دهنده خصوصیات یک نقطه گوشه است، می تواند منجر به عدم ارائه جواب بهینه شود. در واقع این روش در تکرارهای متوالی بر روی این نقاط می چرخد و مسئله را با مشکل مواجه می کند.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

با توجه به توضیحات ارائه شده، می توان جواب های مدل های برنامه ریزی خطی را به صورت زیر دسته بندی نمود:



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

۱- روش سیمپلکس: این روش یکی از قدرتمندترین و کاراترین روش جهت حل مسائل برنامه ریزی خطی با n متغیر است. این روش یک فرآیند حل قدم به قدم و تکراری است که در آن مجموعه ای از عملیات تا دستیابی به پاسخ مطلوب تکرار می شوند. مجموعه گام هایی که در چنین فرآیندی به طور سیستماتیک هر دفعه تجدید می شود، **تکرار** (iteration) نامیده می شود.

این روش **نقاط گوشه از فضای تصمیم موجه** را با منطق خاصی جستجو می کند تا جواب بهینه را بیابد. همچنین در زمان حرکت از یک جواب گوشه به جواب گوشه دیگر، در جهتی حرکت می کند که با شیب بیشتری بتواند مقدار تابع هدف را بهبود ببخشد و در نهایت در یک نقطه گوشه که از نقاط گوشه مجاور خود و در نتیجه از تمامی نقاط گوشه مسئله بهتر است، توقف می کند.

خواص جواب های موجه نقاط گوشه:

- اگر مسئله ای فقط یک جواب بهینه داشته باشد، این جواب حتماً یک جواب گوشه موجه است. اگر جواب بهینه چندگانه داشته باشد، جواب بهینه بر روی چند نقطه گوشه موجه قرار می گیرد.
- اگر یک نقطه گوشه موجه، دارای جواب موجه بهتری نباشد، بهینه است.
- تعداد نقاط گوشه موجه محدود است.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

اولین گام در روش سیمپلکس، استاندارد بودن شکل مدل ریاضی برنامه ریزی خطی است. ویژگی های استاندارد بودن یک مدل LP عبارتند از:

- ❖ تابع هدف به صورت Max باشد.
- ❖ تمامی محدودیت ها به صورت کوچکتر یا مساوی $(\leq)$ باشند.
- ❖ تمامی متغیرها غیرمنفی باشند $(x_j \geq 0 \;\; , j = 1,2, \dots ,n)$

در صورتی که هر یک از این شرط نقض شود، فرم مسئله غیراستاندارد خواهد شد.

فرم یک مسئله استاندارد در روش سیمپلکس به صورت زیر است:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$Subject\ to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\; , \qquad i = 1,2, \dots , m$$

$$x_j \geq 0 \;\; , \qquad j = 1,2, \dots , n$$

جهت حل با روش سیمپلکس، از جدول معرف زیر استفاده می شود:

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	.....	x_n	s_1	s_2	...	s_m	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	.	.	.....	.....	۰	۰	.....	۰	۰	
	۱	۰	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.	
n متغیر اساسی	۲	۰	.	.	ضرایب متغیرها		...	...	...	...	جواب مسئله	چه متغیری خروجی است؟
	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.	
	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.	
	m	۰	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.	

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

در هر تکرار از روش سیمپلکس لازم است یک دستگاه معادله حل شود. با توجه به اینکه عملیات حل دستگاه ها با **معادلات** ساده تر از **نامعادلات** است، لذا ضروری است محدودیت های حاکم بر مسئله که به صورت "نامعادله" می باشند به "معادله" تبدیل شوند. این کار توسط "**متغیرهای برابرساز**" صورت می گیرد.

متغیرهای برابرساز، متغیرهایی با مقدار غیرمنفی هستند که به محدودیت های "کوچکتر یا مساوی" یا "بزرگتر یا مساوی" به ترتیب "اضافه" یا از آن "کم" می شوند. این متغیرها با S نشان داده می شوند. در حالت **اضافه شدن s** به سمت چپ **محدودیت های $\leq$**، آن را **متغیر کمکی کمبود (Slack variable)** و زمانی که از سمت چپ **محدودیت های $\geq$، کم می شوند** به عنوان **متغیرهای مازاد (Surplus variable)** در نظر گرفته می شود. در هر دو وضعیت، این متغیرها به عنوان متغیرهای کمکی S نامیده می شوند.

$$x_1 + 4x_2 \leq 8 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + \boldsymbol{s} = 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4 \Rightarrow x_1 + 2x_2 - \boldsymbol{s} = 4$$

$$x_1 \, , x_2, \boldsymbol{s} \geq 0$$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

تعاریف:

متغیرهای اساسی (Basic variable): متغیرهایی هستند که مقدار غیرصفر دارند.

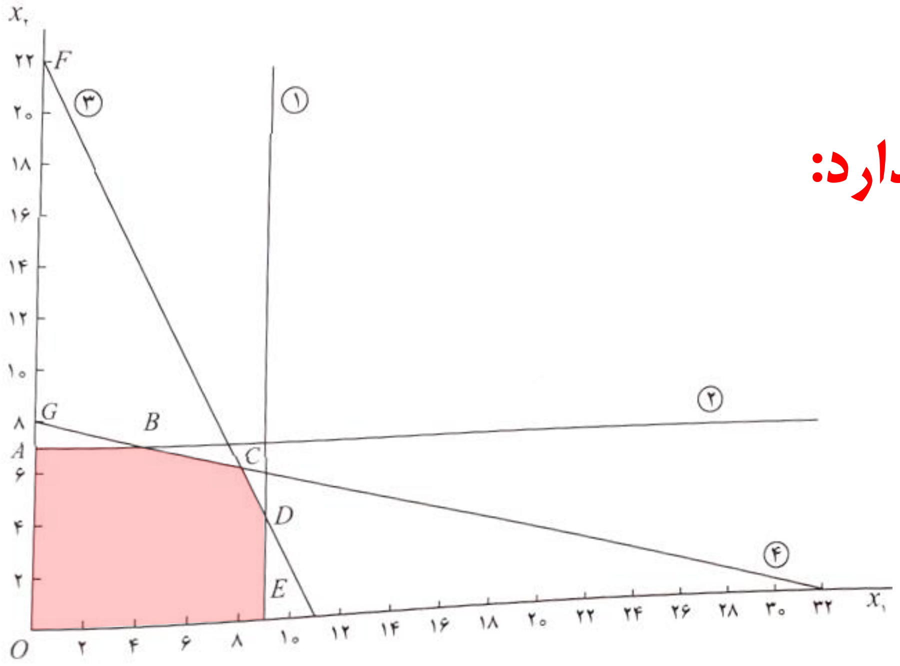
متغیرهای غیراساسی (Non-basic variable): متغیرهایی هستند که مقدار صفر دارند.

جواب اساسی (Basic solution): هر جواب بدست آمده از حل دستگاه معادله که دارای n متغیر صفر باشد.

جواب اساسی موجه (Basic feasible solution): اگر تمامی متغیرهای اساسی جواب بدست آمده، غیرمنفی باشند، آن جواب به عنوان جواب اساسی موجه در نظر گرفته می شود.

حل مسائل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس در فرم استاندارد:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t. } \quad x_1 & \le 9 \\
x_2 &\le 7 \\
2x_1 + x_2 &\le 22 \\
x_1 + 4x_2 &\le 32 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

مرحله ۱) تبدیل محدودیت های نامساوی به مساوی با استفاده از متغیرهای کمکی

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t. } \quad & x_1 \leq 9 \\
& x_2 \leq 7 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 22 \\
& x_1 + 4x_2 \leq 32 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z - x_1 - 3x_2 &= 0 \\
\text{s.t. } \quad x_1 + s_1 &= 9 \\
x_2 + s_2 &= 7 \\
2x_1 + x_2 + s_3 &= 22 \\
x_1 + 4x_2 + s_4 &= 32 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

مرحله ۲) جایگذاری در جدول سیمپلکس: مقدار متغیرهای کمکی در ردیف خود، ۱ و سایر ردیف ها، صفر در نظر گرفته می شود. در سطر صفر، **منفی ترین ستون** به عنوان ستون لولا و با تقسیم اعداد سمت راست بر ستون لولا، **کمترین عدد** مرتبط با ستون حداکثرها به عنوان سطر لولا انتخاب می شود.

ستون لولا

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	−۱	−۳	۰	۰	۰	۰	۰	
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۹	∞
s_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷	۷
s_3	۳	۰	۲	۱	۰	۰	۱	۰	۲۲	۲۲
s_4	۴	۰	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۳۲	۸

عدد لولا

سطر لولا

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

مرحله ۳) جابجا نمودن متغیرها غیراساسی (x_2) با متغیر اساسی (s_2).

هر متغیر اساسی در سطر خود باید یک و در سایر سطرها باید صفر باشد.

ستون لولا

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	−۱	−۳	۰	۰	۰	۰	۰	
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۹	∞
s_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷	۷
s_3	۳	۰	۲	۱	۰	۰	۱	۰	۲۲	۲۲
s_4	۴	۰	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۳۲	۸

عدد لولا

سطر لولا

تکرار اول (نقطه A)

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	−۱	۰	۰	۳	۰	۰	۲۱	
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۹	۹
x_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷	∞
s_3	۳	۰	۲	۰	۰	−۱	۱	۰	۱۵	۷/۵
s_4	۴	۰	۱	۰	۰	−۴	۰	۱	۴	۴

در صورتی که تمامی مقادیر سطر صفر، غیرمنفی باشند، جواب اساسی موجه بدست آمده است.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

هر یک از تکرارها متناظر با یک نقطه گوشه می باشند. با توجه به اینکه سطر صفر در تکرار سوم دارای عدد منفی نمی باشد، لذا جواب بهینه برابر است با:

$x_1 = 8$
$x_2 = 6$
$Z = 26$
$s_1 = 1$
$s_2 = 1$

تکرار دوم (نقطه B) و سوم (نقطه C)

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	۰	۰	۰	−۱	۰	۱	۲۵	
s_1	۱	۰	۰	۰	۱	۴	۰	−۱	۵	۱٫۲۵
x_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۷	۷
s_3	۳	۰	۰	۰	۰	۷	۱	−۲	۷	۱
x_1	۴	۰	۱	۰	۰	−۴	۰	۱	۴	—
Z	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱/۷	۵/۷	۲۶	
s_1	۱	۰	۰	۰	۱	۰	−۴/۷	۱/۷	۱	
x_2	۲	۰	۰	۱	۰	۰	−۱/۷	۲/۷	۶	
s_2	۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱/۷	−۲/۷	۱	
x_1	۴	۰	۱	۰	۰	۰	۴/۷	−۱/۷	۸	

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

حل مسائل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس در فرم غیراستاندارد:

در صورتی فرم مسئله غیراستاندارد خواهد شد که:

- تابع هدف به صورت Min باشد. ← در این حالت لازم است تابع هدف در منفی یک ضرب شود و مشابه فرم استاندارد مسئله حل گردد.
- محدودیت ها به صورت بزرگتر یا مساوی $(\geq)$ یا مساوی باشند.
- متغیرهای تصمیم بتوانند مقادیر منفی را نیز بپذیرند (آزاد در علامت باشند).

در این حالت از دو روش M بزرگ (روش جریمه) و روش دو مرحله ای می توان استفاده نمود.

روش M بزرگ (روش جریمه)

- در این روش برای هر یک از محدودیت های بزرگتر یا مساوی $(\geq)$، یک متغیر کمکی کم و یک متغیر مصنوعی (R) به سمت چپ آن اضافه می شود تا نامعادله به معادله تبدیل گردد. اگر محدودیت مساوی باشد، فقط یک متغیر مصنوعی به سمت چپ معادله اضافه می شود.
- به تعداد متغیرهای مصنوعی در محدودیت های مسئله از سمت راست تابع هدف Max، یک $-MR_i$ اضافه و اگر تابع هدف Min باشد، به سمت راست تابع هدف یک MR_i اضافه می شود.

مثال)

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۲x_۲$$

$$\text{s.t.} \quad ۲x_۱ + x_۲ \leq ۴$$

$$x_۱ + ۲x_۲ \geq ۶$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow$$

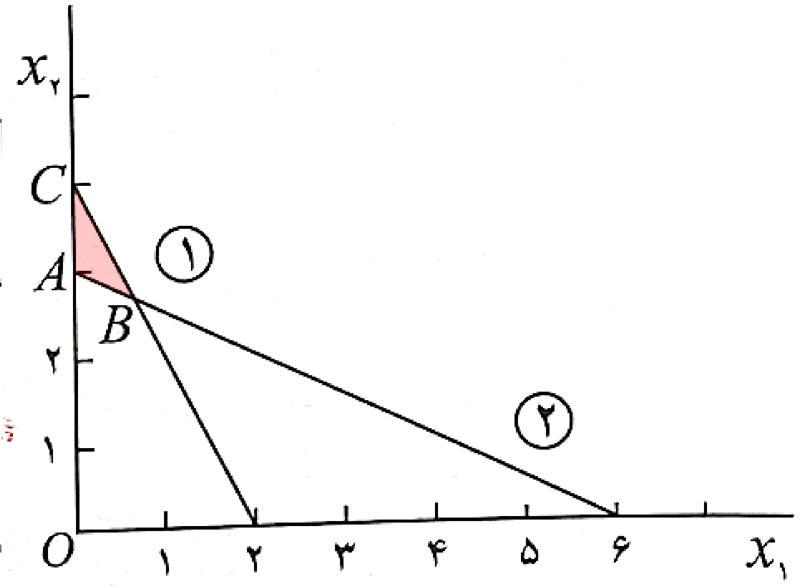
$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۲x_۲ - MR_۲$$

$$\text{s.t.} \quad ۲x_۱ + x_۲ + s_۱ = ۴$$

$$x_۱ + ۲x_۲ - s_۲ + R_۲ = ۶$$

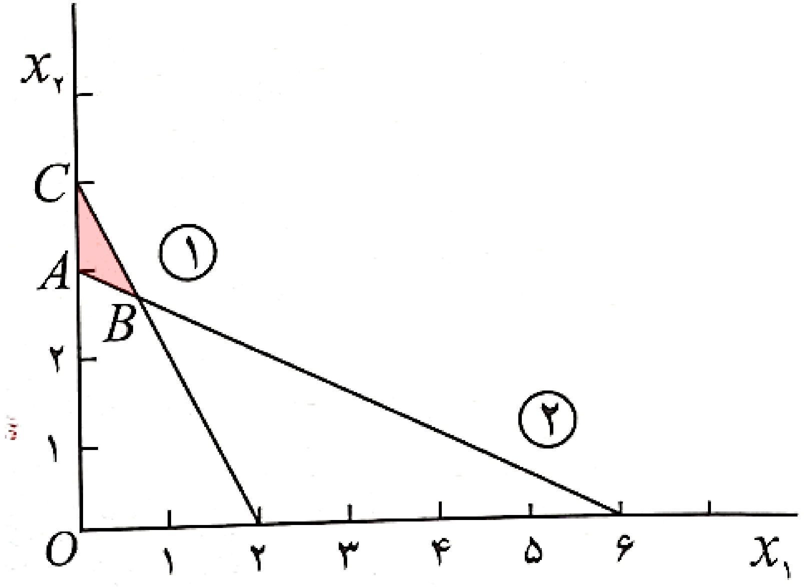
$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, R_۲ \geq ۰$$

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$R_۲$	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-۳	-۲	۰	۰	M	۰
$s_۱$	۱	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴
$R_۲$	۲	۰	۱	۲	۰	-۱	۱	۶



تکرارهای سیمپلکس به روش M بزرگ (متناظر با نقاط O، A، B و C).

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$R_۲$	اعداد سمت راست	حداکثرها	
Z	۰	۱	$(-۳-M)$	$(-۲-۲M)$	۰	M	۰	$-۶M$		**نقطه O**
$s_۱$	۱	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴	۴	
$R_۲$	۲	۰	۱	۲	۰	-۱	۱	۶	۳	
Z	۰	۱	-۲	۰	۰	-۱	$(M+۱)$	۶		
$s_۱$	۱	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۲}{۳}$	**نقطه A**
$x_۲$	۲	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۳	۶	
Z	۰	۱	۰	۰	$\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$(M+\frac{۱}{۳})$	$۷\frac{۱}{۳}$		
$x_۱$	۱	۰	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۲	**نقطه B**
$x_۲$	۲	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$۲\frac{۲}{۳}$	—	
Z	۰	۱	۱	۰	۲	۰	M	۸		
$s_۲$	۱	۰	۳	۰	۲	۱	-۱	۲		**نقطه C**
$x_۲$	۲	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴		



همانطور که ملاحظه می شود، زمانی که راه حل از نقطه O (مبدأ) به نقطه A (وارد فضای تصمیم موجه می شود) می رسد، مقدار متغیر مصنوعی صفر می شود. در واقع استفاده از R فقط جهت رسیدن به منطقه موجه است.

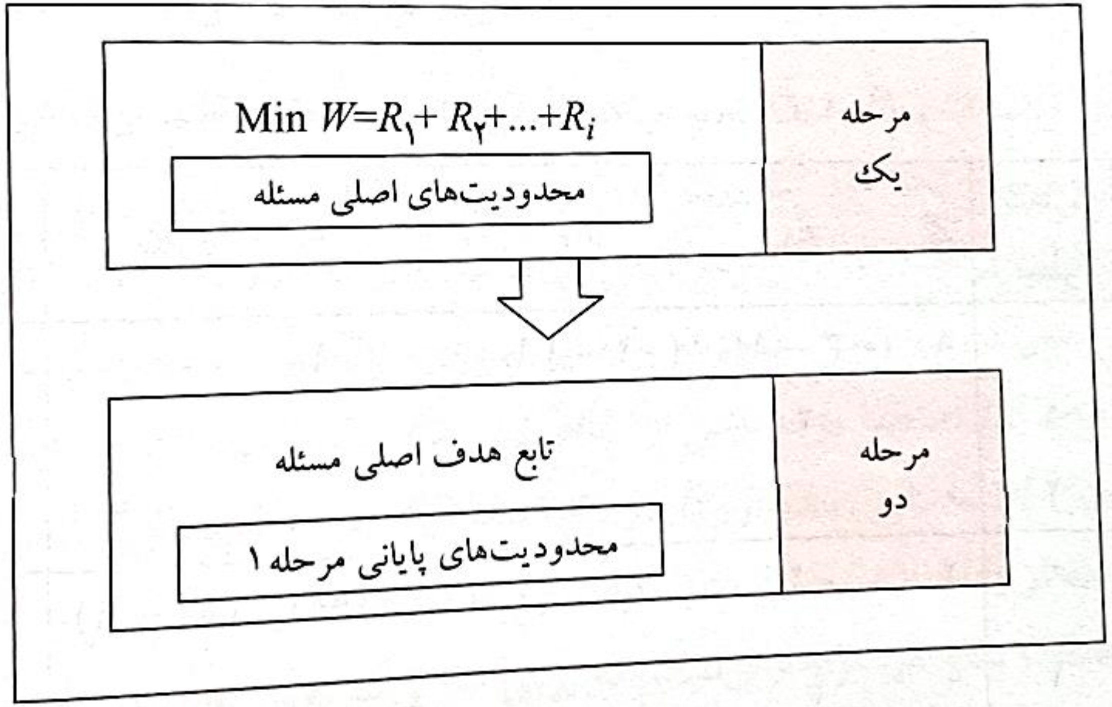
جواب بهینه

$$x_1 = 0\ , x_2 = 4\ , Z = 8$$
$$s_1 = 0\ , s_2 = 2$$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

روش دو مرحله ای

با توجه به اینکه در محاسبات کامپیوتری، روش M بزرگ از ثبات کمتری برخوردار است، لذا روش دو مرحله برای مسائل با محدودیت های " $\geq$ " و "=" توسعه یافت. مراحل این روش:



❖ **یافت جواب موجه ابتدایی با استفاده از تابع هدف مصنوعی:** همانند روش M بزرگ، با اضافه کردن متغیرهای مصنوعی، محدودیت ها به صورت معادله درآورده می شوند. سپس تابع هدف مسئله به صورت حداقل نمودن مجموع متغیرهای مصنوعی تعریف می گردد (بهترین مقدار این تابع هدف صفر است). با تعیین مقدار صفر برای تابع هدف، می توان دریافت که راه حل به منطقه موجه رسیده است.

❖ **پیدا کردن جواب بهینه مسئله با استفاده از تابع هدف اصلی:** در این مرحله با استفاده از تابع هدف اصلی مسئله و محدودیت های پایانی مرحله اول، حرکت در منطقه موجه تا یافتن جواب بهینه ادامه می یابد.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

مثال)

مرحله اول

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Min } W = R_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 - s_2 + R_2 = 6 \\ & x_1, x_2, R_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه در تابع هدف تغییر یافته، تابع هدف Min است، لذا ابتدا آن به Max تبدیل می نمائیم:

$$Min\ W = R_2$$

$$\Rightarrow Max - W = -R_2$$

$$\Rightarrow Max - W + R_2 = 0$$

پایان مرحلهٔ اول

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	W	x_1	x_2	s_1	s_2	R_2	اعداد سمت راست	حداکثرها
W	0	-1	0	0	0	0	1	0	یکه کردن
s_1	1	0	2	1	1	0	0	4	بردار متغیر
R_2	2	0	1	2	0	-1	1	6	اساسی R_2
W	0	-1	-1	-2	0	1	0	-6	
s_1	1	0	2	1	1	0	0	4	4
R_2	2	0	1	2	0	-1	1	6	3
W	0	-1	0	0	0	0	1	0	
s_1	1	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
x_2	2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	

با توجه به اینکه تمامی اعداد متغیرهای غیراساسی سطر صفر برابر با صفر می باشند، لذا شرط بهینگی برقرار است و منفی بودن مقدار تابع هدف در سطر صفر نشان دهنده، Min بودن آن است و بالعکس.

مرحله دوم

جهت شروع مرحله دوم، سطرهای اول و دوم مرحله قبل استخراج شده و تابع هدف اصلی در سطر صفر جایگزین می شود.

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\Rightarrow Max\ Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

جواب بهینه

$x_1 = 0\ , x_2 = 4\ , Z = 8$
$s_1 = 0\ , s_2 = 2$

تکرارهای مرحلهٔ دوم.

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	اعداد سمت راست	حداکثرها
Z	۰	۱	−۳	−۲	۰	۰	۰	یکه کردن بردار متغیر اساسی x_2
s_1	۱	۰	۳/۲	۰	۱	۱/۲	۱	
x_2	۲	۰	۱/۲	۱	۰	−۱/۲	۳	
Z	۰	۱	−۲	۰	۰	−۱	۶	
s_1	۱	۰	۳/۲	۰	۱	۱/۲	۱	۲/۳
x_2	۲	۰	۱/۲	۱	۰	−۱/۲	۳	۶
Z	۰	۱	۰	۰	۴/۳	−۱/۳	۷ ۱/۳	
x_1	۱	۰	۱	۰	۲/۳	۱/۳	۲/۳	۲
x_2	۲	۰	۰	۱	−۱/۳	−۲/۳	۲ ۲/۳	—
Z	۰	۱	۱	۰	۲	۰	۸	
s_2	۱	۰	۳	۰	۲	۱	۲	
x_2	۲	۰	۲	۱	۱	۰	۴	

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

حل مسائلی که دارای متغیرهای آزاد در علامت می باشند:

در برخی مواقع، مسائل برنامه ریزی خطی با متغیرهایی مواجه می شوند که می توانند مقادیر منفی را هم اختیار کنند. این مسائل به عنوان مسائل آزاد در علامت در نظر گرفته می شوند. در این حالت لازم است متغیر آزاد در علامت (x_j) به فرم زیر تبدیل شود:

روش اول: استفاده از تغییر متغیر

$$x_j = x_j' - x_j'' \ , \qquad x_j' \geq 0 \ , \qquad x_j'' \geq 0$$

بر این اساس تمامی متغیرهای مسئله به متغیرهای غیرمنفی تبدیل می شوند و می توان با روش استاندارد سمپلکس حل نمود.

مثال)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= ۴x_۱ + x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & x_۱ + ۴x_۲ \leq ۴ \\ & x_۱ - ۲x_۲ \leq ۶ \\ & x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ آزاد در علامت} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه هر دو متغیر، آزاد در علامت می باشند، لذا لازم است برای هر دو، از تغییر متغیر زیر استفاده نمود:

$$x_1 = x_1' - x_1'' \ , \qquad x_1' \geq 0 \ , \qquad x_1'' \geq 0$$

$$x_2 = x_2' - x_2'' \ , \qquad x_2' \geq 0 \ , \qquad x_2'' \geq 0$$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + x_۲$$

$$\text{s.t.} \quad x_۱ + ۴x_۲ \leq ۴$$

$$x_۱ - ۲x_۲ \leq ۶$$

$x_۱$ و $x_۲$ آزاد در علامت

$$Max\ Z = 4(x_1' - x_1'') + x_2' - x_2''$$

$$x_1' - x_1'' + 4x_2' - 4x_2'' + s_1 = 4$$

$$x_1' - x_1'' - 2x_2' + 2x_2'' + s_2 = 6$$

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', s_1, s_2 \geq 0$$

حل با روش سمپلکس استاندارد

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	$x'_۱$	$x''_۱$	$x'_۲$	$x''_۲$	$s_۱$	$s_۲$	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	−۴	۴	−۱	۱	۰	۰	۰
$s_۱$	۱	۰	۱	−۱	۴	−۴	۱	۰	۴
$s_۲$	۲	۰	۱	−۱	−۲	۲	۰	۱	۶
Z	۰	۱	۰	۰	۱۵	−۱۵	۴	۰	۱۶
$x'_۱$	۱	۰	۱	−۱	۴	−۴	۱	۰	۴
$s_۲$	۲	۰	۰	۰	−۶	۶	−۱	۱	۲
Z	۰	۱	۰	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	۲۱
$x'_۱$	۱	۰	۱	−۱	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱۶}{۳}$
$x''_۲$	۲	۰	۰	۰	−۱	۱	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$

جواب بهینه

$$x_۱^* = x'_۱ - x''_۱ = \frac{۱۶}{۳} - ۰ = \frac{۱۶}{۳}$$

$$x_۲^* = x'_۲ - x''_۲ = ۰ - \frac{۱}{۳} = -\frac{۱}{۳}$$

$$Z^* = ۲۱$$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

روش دوم: حذف متغیر آزاد در علامت

در این روش متغیر آزاد در علامت حذف می شود. به این صورت که این متغیر (بر اساس یکی از محدودیت هایی که دارای ضریب غیرصفر است) بر حسب سایر متغیرهای تصمیم مسئله بازنویسی شده و در تمامی محدودیت ها و تابع هدف جایگزین می گردد. با انجام این فعالیت، یکی از محدودیت ها حذف خواهند شد. به عنوان مثال اگر محدودیت iام $(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i)$ دارای ضریب غیرصفر برای متغیر x_1 باشد، می توان x_1 را به صورت ترکیب خطی از سایر متغیرها ارائه نمود. لذا با جایگزین کردن آن در سایر محدودیت ها و تابع هدف، مسئله جدید دارای $(n-1)$ متغیر تصمیم $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ و $(m-1)$ محدودیت خواهد بود که با روش سمپلکس استاندارد قابل حل است.

مثال) با توجه به اینکه متغیر x_1 آزاد در علامت است، لذا بر اساس محدودیت اول می توان نوشت:

$$Min\ Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Subject to:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 \ is\ free\ \ and\ x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$$

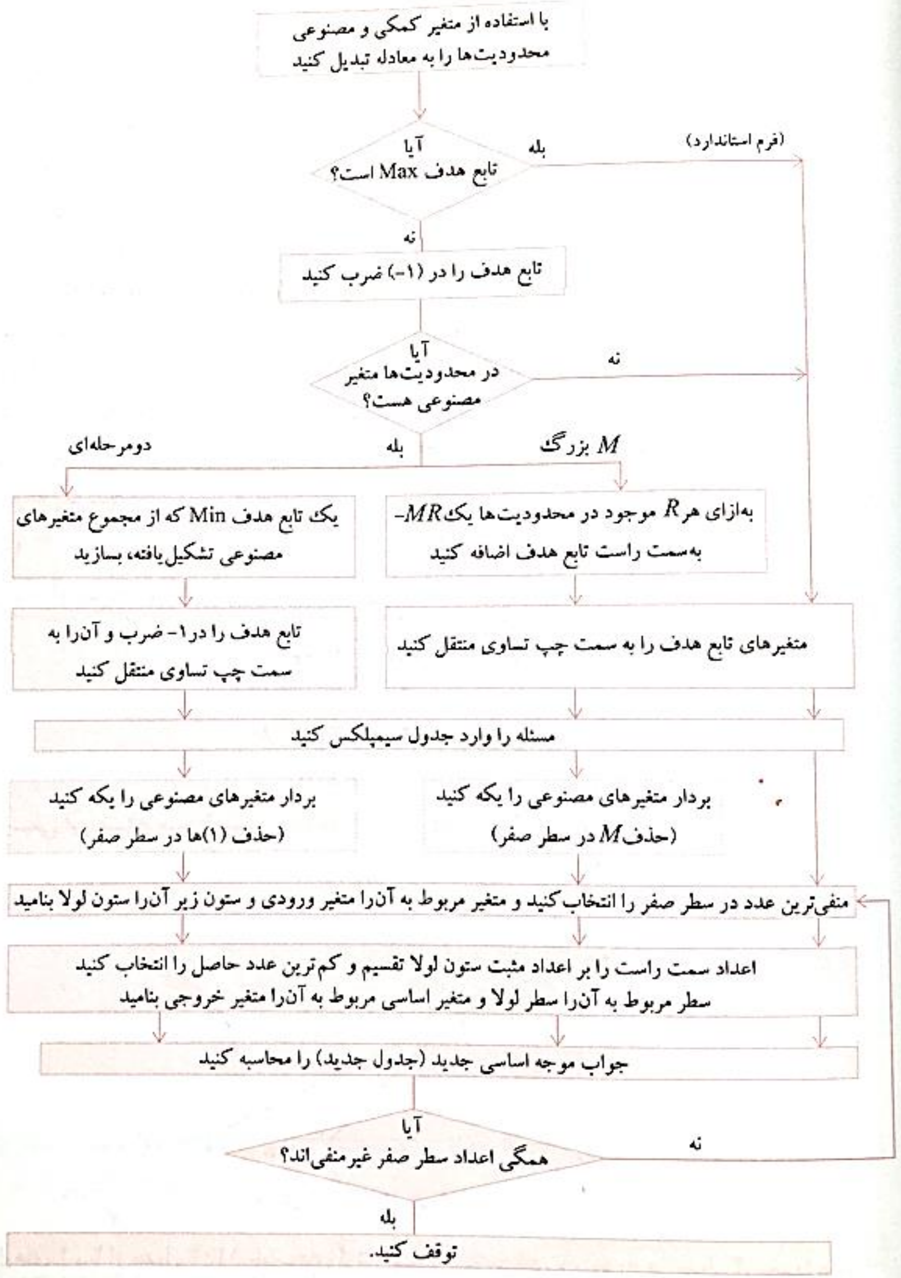
$$Min\ Z = 2x_2 + 2x_3 + 5$$

Subject to:

$$x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2, x_3 \geq 0$$

جواب بهینه $x_1 = -3\ , x_2 = 4\ \ , x_3 = 0\ \ , Z = 9$

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی



نکات قابل توجه در روش سمپلکس:

- ❖ اعداد سمت راست در جدول سیمپلکس هیچ گاه منفی نمی شوند.
- ❖ در تکرارهای متوالی جدول سیمپلکس، مقادیر Z هیچ گاه بدتر نمی شود (یا ثابت می ماند و یا بهتر می شود.)
- ❖ متغیرهای اساسی (اعم از متغیرهای تصمیم و کمکی) در تمامی جداول سیمپلکس باید در سطر خود، یک و سایر سطرها صفر باشند.

ساختار کلی حل مسائل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس

حالت های خاص در روش سیمپلکس

۱- جواب بهینه چندگانه: زمانی که ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر جدول نهایی صفر باشد، نشانه چندگانه بودن جواب بهینه است. در این حالت متغیری که مقدار آن در سطر صفر، صفر شده است به عنوان ورودی انتخاب می شود و بر اساس آن جواب بهینه بعدی تعیین می شود. این روند تا دستیابی به تمامی جواب های بهینه ادامه می یابد.

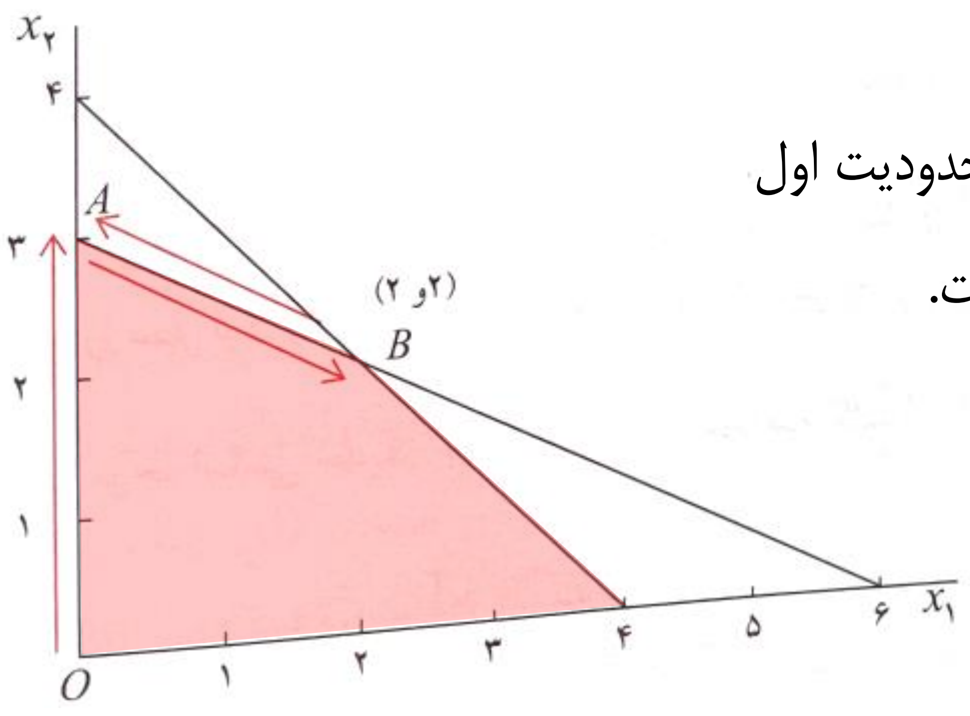
مثال)

$$\text{Max } Z = ۱۰x_۱ + ۲۰x_۲$$

$$\text{s.t.} \quad ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۱۲$$

$$۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸$$

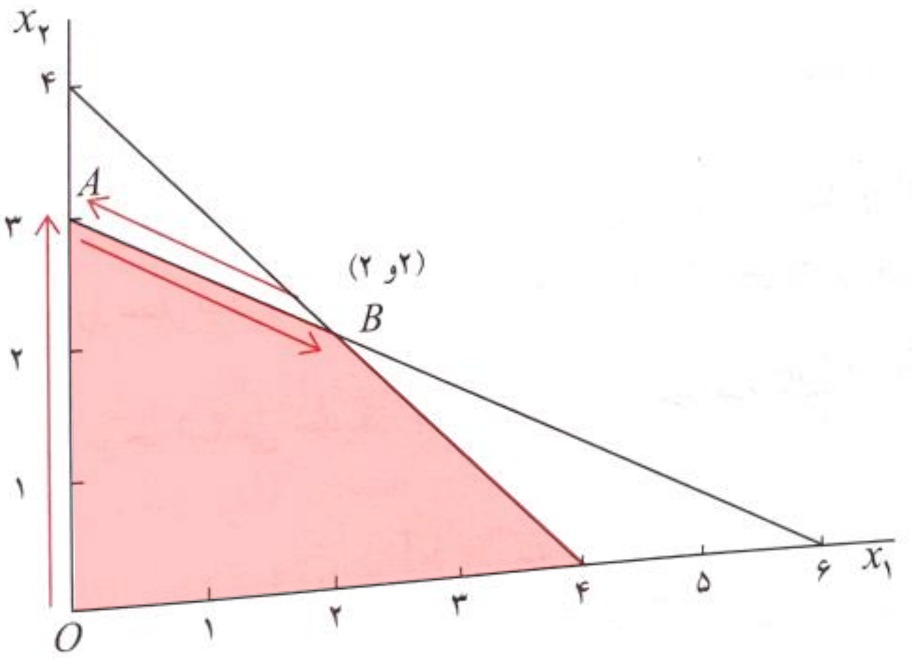
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



در این مسئله با توجه به اینکه تابع هدف با محدودیت اول موازی است لذا دارای جواب بهینه چندگانه است.

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	اعداد سمت راست	تناظر جدول با شکل
Z	۰	۱	-10	-20	۰	۰	۰	جدول ۱ (نقطهٔ O)
s_1	۱	۰	۲	۴	۱	۰	۱۲	
s_2	۲	۰	۲	۲	۰	۱	۸	
Z	۰	۱	$\boxed{0}$	۰	۵	۰	۶۰	جدول ۲ (نقطهٔ A، جدول بهینه)
x_2	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{4}$	۰	۳	
s_2	۲	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۲	
Z	۰	۱	۰	۰	۵	$\boxed{0}$	۶۰	جدول ۳ (نقطهٔ B)
x_2	۱	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۲	
x_1	۲	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۲	
Z	۰	۱	۰	۰	۵	۰	۶۰	جدول ۴ (نقطهٔ A)
x_2	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{4}$	۰	۳	
s_2	۲	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۲	



نکته ۱: در مسائل دو متغیره، تمامی جواب های بهینه را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\bar{x}_1 = \lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}$$

$$\bar{x}_2 = \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}$$

$$0 \le \lambda \le 1$$

برای مثال فوق با داشتن دو نقطهٔ $A(0,3)$ و $B(2,2)$ داریم:

$$x_1 = \lambda(0) + (1-\lambda)(2) = 2 - 2\lambda$$

$$x_2 = 3\lambda + (1-\lambda)(2) = 2 + \lambda$$

نکته ۲: در مسائل n متغیره (مشتمل بر متغیرهای تصمیم و کمکی که با $\bar{x}_m^{(i)}$ نمایش داده می شوند)، تمامی جواب های بهینه را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\bar{x}_m = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i \bar{x}_m^{(i)} \quad , \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i = 1 \ , \qquad 0 \le \lambda_i \le 1$$

مثال)

$$\text{Max } Z = x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ &\le ۱۰ \\ x_۱ + x_۲ &\le ۵ \\ x_۱ &\le ۱ \\ x_۱, x_۲, x_۳ &\ge ۰ \end{aligned}$$

تکرارهای سیمپلکس برای مسئله‌ای با جواب‌های بهینهٔ چندگانه (سه‌متغیره)

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	اعداد سمت راست	جواب بهینه
Z	۰	۱	−۱	−۲	−۳	۰	۰	۰	۰	
$s_۱$	۱	۰	۱	۲	۳	۱	۰	۰	۱۰	
$s_۲$	۲	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۵	
$s_۳$	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	
Z	۰	۱	۰	$\boxed{۰}$	۰	۱	۰	۰	۱۰	اولین جواب بهینه $(i = ۱)$
$x_۳$	۱	۰	۱/۳	۲/۳	۱	۱/۳	۰	۰	۱۰/۳	$x_۱ = ۰$
$s_۲$	۲	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۵	$x_۲ = ۰$
$s_۳$	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	$x_۳ = \frac{۱۰}{۳}$
Z	۰	۱	$\boxed{۰}$	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰	دومین جواب بهینه $(i = ۲)$
$x_۳$	۱	۰	−۱/۳	۰	۱	۱/۳	−۲/۳	۰	۰	$x_۱ = ۰$
$x_۲$	۲	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۵	$x_۲ = ۵$
$s_۳$	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	$x_۳ = ۰$
Z	۰	۱	۰	۰	۰	۱	$\boxed{۰}$	۰	۱۰	سومین جواب بهینه $(i = ۳)$
$x_۳$	۱	۰	۰	۰	۱	۱/۳	−۲/۳	۱/۳	۱/۳	$x_۱ = ۱$
$x_۲$	۲	۰	۰	۱	۰	۰	۱	−۱	۴	$x_۲ = ۴$
$x_۱$	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	$x_۳ = \frac{۱}{۳}$
Z	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱۰	چهارمین جواب بهینه $(i = ۴)$
$x_۳$	۱	۰	۰	۲/۳	۱	۱/۳	۰	−۱/۳	۳	$x_۱ = ۱$
$s_۲$	۲	۰	۰	۱	۰	۰	۱	−۱	۴	$x_۲ = ۰$
$x_۱$	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	$x_۳ = ۳$

سایر جواب های بهینه عبارتند از:

$$\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \bar{x}_m^{(i)} \quad , \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i = 1 \ , \qquad 0 \le \lambda_i \le 1$$

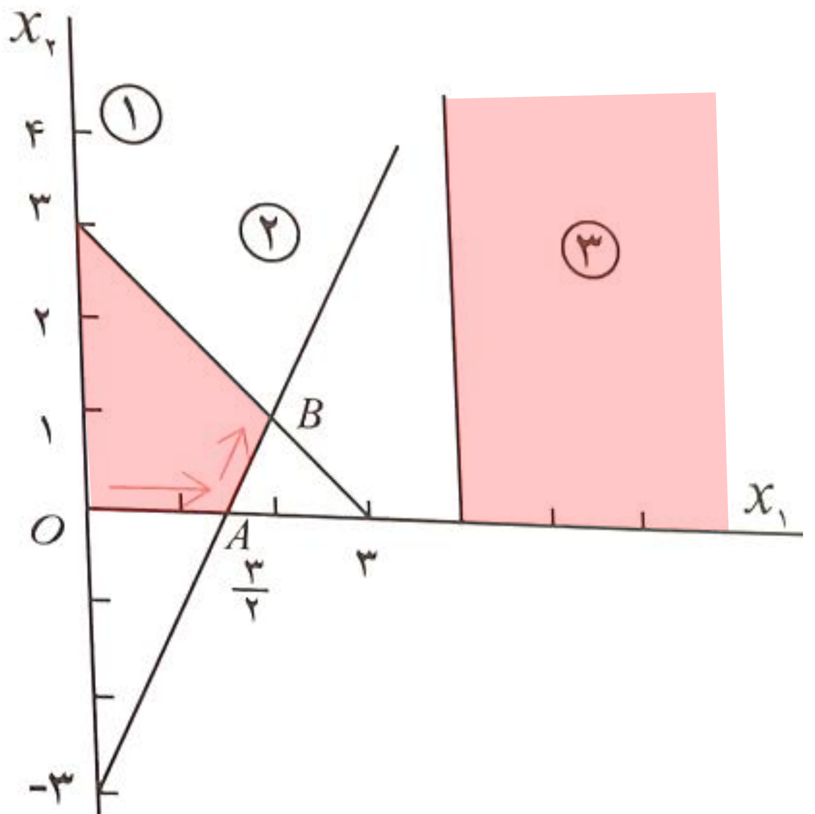
$$\bar{x}_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \quad , \qquad \bar{x}_2 = 5\lambda_2 + 4\lambda_3$$

$$\bar{x}_3 = \frac{10}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 + 3\lambda_4 \quad , \qquad \bar{s}_1 = 0$$

$$\bar{s}_2 = 5\lambda_1 + 4\lambda_4 \quad , \qquad \bar{s}_3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

۲- فقدان جواب بهینه (مسائل بدون منطقه موجه): در صورتی که یک یا چند متغیر اساسی مصنوعی در جدول نهایی سیمپلکس غیرصفر باشند نشان می دهد که جریمه های تعیین شده در نتیجه اعمال متغیر مصنوعی نتوانسته منطقه موجه اضافه شده را مجدداً به اندازه منطقه موجه اصلی برساند.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\le 3 \\ 2x_1 - x_2 &\le 3 \\ x_1 \quad &\ge 4 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 - MR \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + s_2 &= 3 \\ x_1 - s_3 + R &= 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R &\ge 0 \end{aligned}$$



روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	R	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-۴	-۳	۰	۰	۰	M	۰
$s_۱$	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳
$s_۲$	۲	۰	۲	-۱	۰	۱	۰	۰	۳
R	۳	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱	۴
Z	۰	۱	$(-۴-M)$	-۳	۰	۰	M	۰	$-۴M$
$s_۱$	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳
$s_۲$	۲	۰	۲	-۱	۰	۱	۰	۰	۳
R	۳	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱	۴
Z	۰	۱	۰	$\left(-\frac{M}{۲}-۵\right)$	۰	$\left(\frac{M}{۲}+۲\right)$	M	۰	$\frac{-۵}{۲}M+۶$
$s_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$
$x_۱$	۲	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$
R	۳	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	۱	$\frac{۵}{۲}$
Z	۰	۱	۰	۰	$\left(\frac{M+۱۰}{۳}\right)$	$\left(\frac{M+۱}{۳}\right)$	M	۰	$-۲M+۱۱$
$x_۲$	۱	۰	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۰	۱
$x_۱$	۲	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	۲
R	۳	۰	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	-۱	۱	۲

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲ - MR$$

$$\text{s.t.} \quad x_۱ + x_۲ + s_۱ = ۳$$

$$۲x_۱ - x_۲ + s_۲ = ۳$$

$$x_۱ - s_۳ + R = ۴$$

$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳, R \geq ۰$$

با توجه به اینکه متغیر مصنوعی R، غیرصفر است، لذا دارای جواب بهینه نمی باشد.

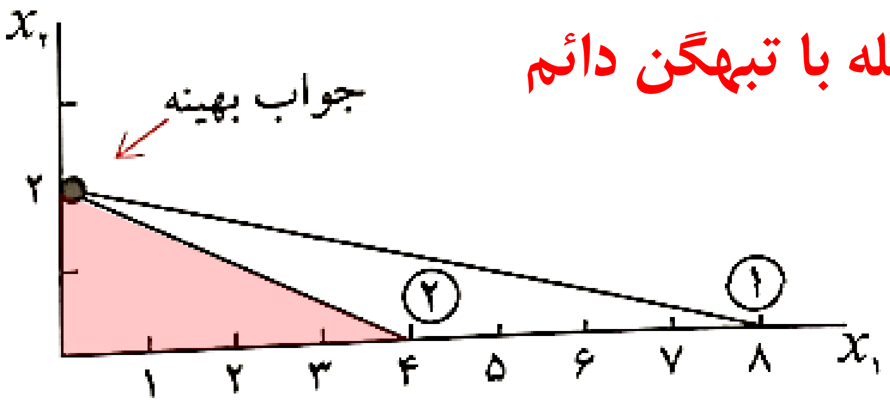
۳- تبهگن: هرگاه یک نقطه گوشه از محل تقاطع بیش از دو معادله حدی تشکیل شده باشد، مسئله دارای حالت خاص تبهگن است. در جدول سیمپلکس در صورتی که مقدار یک متغیر اساسی در ستون اعداد سمت راست برای یک سا چند سطر بجز سطر صفر، صفر شود، می توان تبهگن بودن مسئله را تشخیص داد. حالت تبهگن می تواند موقت و دائم باشد. **در صورت دائم بودن هیچ تغییری در مقدار تابع هدف در تکرارهای مختلف رخ نمی دهد و جواب های تکراری ارائه می شود.**

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 4x_2 \le 8$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



مسئله با تبهگن دائم

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-3	-9	۰	۰	۰
s_1	۱	۰	۱	۴	۱	۰	۸
s_2	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۴
Z	۰	۱	$-\frac{3}{4}$	۰	$\frac{9}{4}$	۰	۱۸
x_2	۱	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{1}{4}$	۰	۲
s_2	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۰
Z	۰	۱	۰	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	۱۸
x_2	۱	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۲
x_1	۲	۰	۱	۰	-1	۲	۰

مسئله با تبهگن موقت

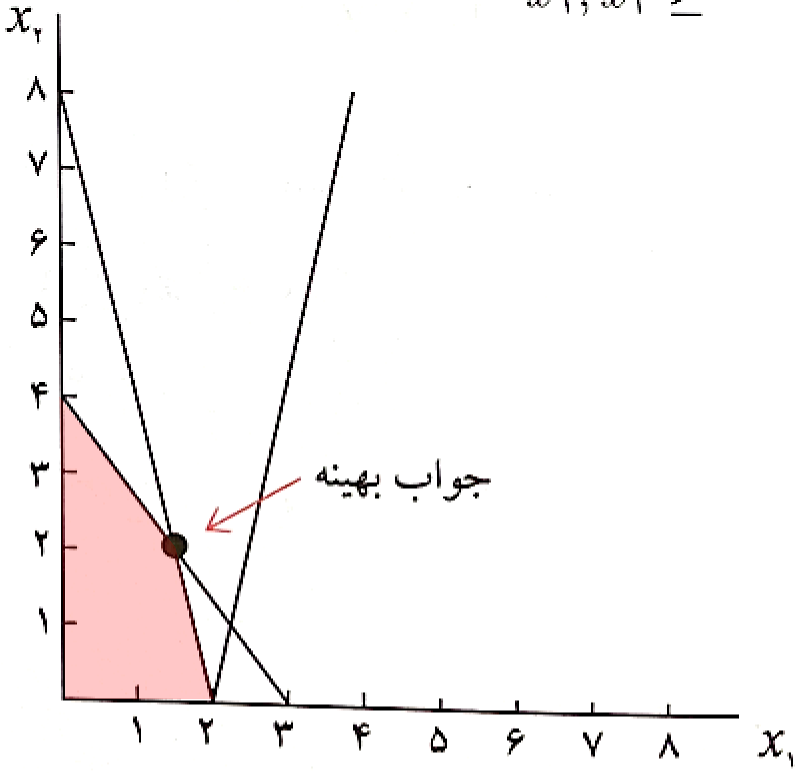
$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



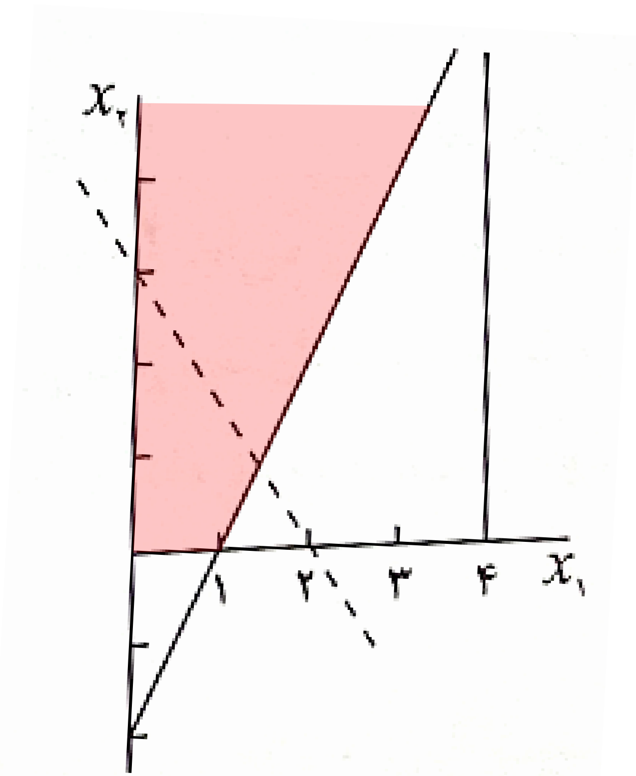
متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	اعداد سمت راست
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0
s_1	1	0	4	3	1	0	0	12
s_2	2	0	4	1	0	1	0	8
s_3	3	0	4	-1	0	0	1	8
Z	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	4
s_1	1	0	0	2	1	-1	0	4
x_1	2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2
s_3	3	0	0	-2	0	-1	1	0
Z	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	5
x_2	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_1	2	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{2}$
s_3	3	0	0	0	1	-2	1	4

روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

۳- منطقه موجه نامحدود: در این حالت مسئله می تواند جواب بهینه محدود و یا نامحدود داشته باشد. اگر در جدول نهایی سیمپلکس، عدد منفی در بین مقادیر متغیرهای غیراساسی در سطر صفر دیده شود اما امکان اساسی شدن آن وجود نداشته باشد، می توان دریافت که جواب بهینه نامحدود است.

جواب بهینه نامحدود

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



متغیر ورودی وجود دارد اما متغیر خروجی وجود ندارد.

متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-6	-2	۰	۰	۰
s_1	۱	۰	۲	-1	۱	۰	۲
s_2	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۴
Z	۰	۱	۰	-5	۳	۰	۶
x_1	۱	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱
s_2	۲	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۳
Z	۰	۱	۰	۰	-2	۱۰	۳۶
x_1	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۴
x_2	۲	۰	۰	۱	-1	۲	۶

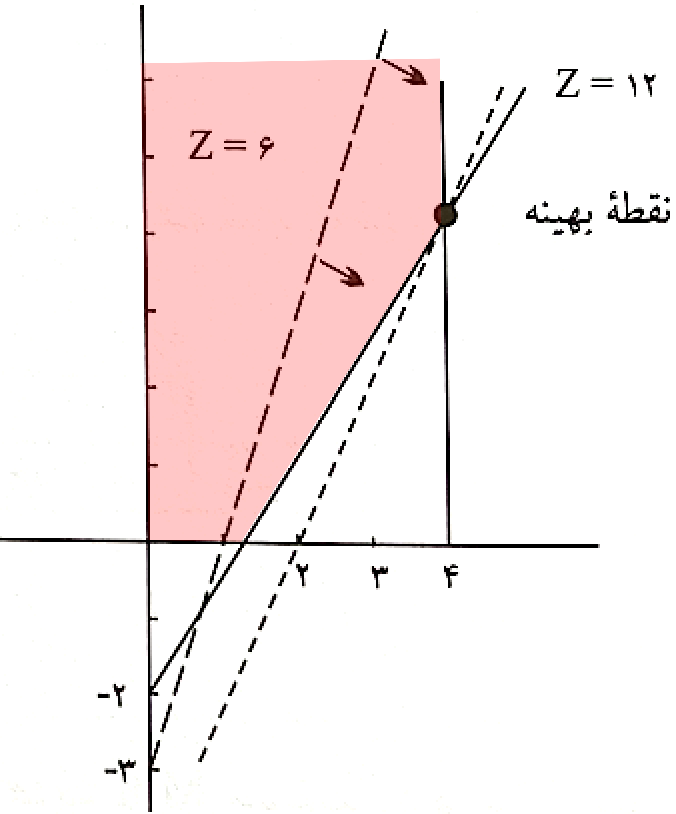
روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی

همانطور که مشاهده می شود در این مسئله فقط شیب تابع هدف تغییر یافته است که منتج به جواب بهینه محدود گردید.

$$\text{Max } Z = 6x_1 - 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه محدود



متغیرهای اساسی	شمارهٔ سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-6	۲	۰	۰	۰
s_1	۱	۰	۲	-1	۱	۰	۲
s_2	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۴
Z	۰	۱	۰	-1	۳	۰	۶
x_1	۱	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱
s_2	۲	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۳
Z	۰	۱	۰	۰	۲	۲	۱۲
x_1	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۴
x_2	۲	۰	۰	۱	-1	۲	۶